GEOMETRIE ET DYNAMIQUE EN ROBOTIQUE

Frédéric Boyer

Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes
Ecole des Mines de Nantes,
1 Rue de la Noë, B.P 92101
44321 Nantes cedex 3, FRANCE

Frederic.Boyer@emn.fr

Résumé

Le but de cet exposé est de relater les liens entre dynamique et géométrie. Les systèmes abordés relèvent de la robotique et nous verrons qu'en ce domaine, la quête de mécanismes de plus en plus sophistiqués, et de leur modèles dynamiques associés, se traduit par la complexification des structures géométriques qu'ils impliquent. Le point de vue adopté est celui du calcul des variations de type « principe d'Hamilton » sur l'espace des configurations du robot.

Mots Clef

Dynamique, Géométrie différentielle, groupes de Lie, fibrés principaux, connexions…

1 Introduction

La mécanique dans son ensemble, est l'une des plus belles applications de la géométrie. Aussi, parle t'on aujourd'hui de « Mécanique Géométrique », une appellation qui confine au pléonasme tant depuis leurs origines ces deux disciplines sont intimement liées. Que l'on songe par exemple au concept de droite dans un espace euclidien. A sa définition géométrique s'ajoute celle que nous donne la dynamique des corps inertes : « les droites sont les trajectoires inertielles des masses d'épreuve imaginées par Newton » [1], i.e. les courbes intégrales de l'équation différentielle d'ordre deux:

$$m\,\gamma = 0 \qquad (1)$$

Où m figure la masse d'épreuve et γ son accélération relativement à un référentiel fixe dont on postule l'existence. Ainsi la géométrie d'un espace est elle intimement liée à la dynamique de la matière qui s'y meut et réciproquement, sans qu'il soit toujours possible de les séparer. Cet état de fait trouve son apogée dans la relativité générale et ses équations d'Einstein [2]. Dans cet exposé nous tisserons les liens existants entre ces deux disciplines, et ce, du point de vue des systèmes mécaniques tels que la robotique les conçoit. Notre point de vue sera celui de Lagrange (qu'on oppose ici à celui d'Hamilton). Dans cette approche, toutes les informations d'un système conservatif sont contenues dans une unique fonction de ses positions et vitesses appelée « lagrangien du système ». Selon la démarche mise au point par Euler et Lagrange, les équations de la dynamique du système sont directement accessibles à partir de ce lagrangien et du point de vue géométrique, régissent le mouvement d'un unique point figurant le système dans un espace abstrait dit « des configurations ». Aussi, progresserons nous à partir de cette notion d'espace des configurations et nous verrons qu'à mesure que la Robotique invente des systèmes de plus en plus complexes, ces derniers évoluent sur des espaces de complexité correspondante. La trame poursuivie est celle de l'évolution des mécanismes robotiques de ces dernières années. Le choix est ici fait de structurer cette évolution en deux grandes tâches : la « manipulation » et la « locomotion ». Aussi partirons nous des robots manipulateurs pour peu à peu migrer vers les systèmes dédiés à la locomotion. La transition entre ces deux domaines se fera par le biais du modèle géométrique des déplacements euclidiens dans $\mathbb{R}^3$, et de la dynamique du solide rigide. Du point de vue géométrique, suivant pas à pas cette évolution, nous introduirons tour à tour la notion de variété, puis de groupe, et enfin d'espace fibré. Sur chacun de ces espaces, nous considèrerons le problème de la génération des équations de la dynamique en suivant l'approche lagrangienne, i.e. : construction d'un lagrangien, mise en œuvre du calcul des variations au travers du principe d'Hamilton (ou « des travaux virtuels ») et enfin : génération des équations de la dynamique. Finalement, nous conclurons.

2 Dynamique sur une variété : les robots manipulateurs

Par robot manipulateur, on entend ici un système poly-articulé réalisé par l'assemblage de corps rigides

connectés par des liaisons à 1 degré de liberté chacune [3] que nous supposerons pour fixer les idées, toutes rotoïdes. Les corps sont au nombre de n et notés S_o, $S_1,...S_n$ de la base supposée fixe, à l'outil, supposé libre. Dans ce cas, chaque degré de liberté articulaire engendre un cercle noté $\mathbb{S}^1$ paramétré par un angle $q^i \in [0, 2\pi[$ et l'espace des configurations du robot est : $\mathcal{C} := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times ... \mathbb{S}^1}_{n \text{ copies}}$, i.e. un hyper-tore de dimension n.

2.1 Rappels de mécanique analytique

En accord avec les usages de la mécanique de Lagrange, à toute posture du robot correspond une position du point système (quelque fois appelé « affixe » par les « anciens ») sur l'hyper - tore de ses configurations. Le lagrangien du système se définit comme une fonction des $(q, \dot{q}) \in T\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ [1], i.e. comme :

$$L : (q, \dot{q}) \in T\mathcal{C} \mapsto L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Où T est l'énergie cinétique du système, définie dans le cas d'un robot avec base fixe par la forme quadratique homogène des vitesses :

$$T(q, \dot{q}) = 1/2\ \dot{q}^T M(q)\, \dot{q} \quad (3)$$

Avec $M(q)$, la matrice des inerties généralisées du robot. Enfin U est l'énergie potentielle du système dont les forces conservatives, telles la gravité, dérivent. Une fois ce résultat en main, les équations du mouvement se déduisent du principe (indémontrable) dit d'Hamilton : qui s'énonce ainsi : « Entre deux instants fixés t_1 et t_2, parmi toutes les trajectoires que le système peut virtuellement emprunter, la trajectoire qu'il emprunte réellement réalise un extremum de la fonctionnelle suivante (fonction des trajectoires possibles notées $q(.)$) :

$$A(q(.)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt \quad (4)$$

qu'on appelle l'action du système. » Techniquement, cette condition équivaut à la condition de stationnarité de A qui s'écrit :

$$\delta A(q(.)) = 0 \ , \ \forall \delta q(.) \quad (5)$$

Où le symbole δ dénote la variation et représente le terme linéaire du développement en perturbation d'une fonctionnelle (ici A) des trajectoires perturbées selon :

$$\forall t \in \mathbb{R} \mapsto q_\varepsilon(t) = q(t) + \varepsilon \delta q(t) \quad (6)$$

Où ε est un paramètre réel indépendant du temps, δq un déplacement virtuel, et :

$$\delta A = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} A(q_\varepsilon(.)) \quad (7)$$

Notons ici que l'indépendance de ε vis à vis du temps définit une variation qui n'est pas la seule possible [4]. En fait, dans ce cas particulier qui suffit à notre propos, la variation est dite à temps fixe et cette condition impose la relation de commutation suivante entre opérateurs variation et dérivée temporelle:

$$\left(\frac{d}{dt} \delta - \delta \frac{d}{dt} \right) . f = 0 \ , \ \forall f \quad (8)$$

Où f représente une fonction douce de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$, telles que le sont les fonctions coordonnées q^i. Aussi, en introduisant les opérateurs (vecteurs du point de vue géométrique) : $\delta . = \delta q^j \partial_{q^j}$ et $d./dt = \dot{q}^i \partial_{q^i}$, on réalise ainsi que (8) est trivialement satisfaite en vertu des conditions d'intégrabilité :

$$[\partial_{q^i}, \partial_{q^j}] = \partial_{q^i} \partial_{q^j} - \partial_{q^j} \partial_{q^i} = 0 \ , \ \forall\ i, j$$

Où [.,.] est le crochet de Poisson sur $\mathcal{C}$. Une fois ceci posé, l'application de (7) à (4)-(5) conduit après calcul aux équations dues à Euler et Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (9)$$

Où notons qu'en partant de (5), l'obtention de (9) réclame d'invoquer les arguments suivants :

- La variation est effectuée à temps fixe ce qui permet de faire entrer le symbole δ sous l'intégrale temporelle, puis d'échanger δ et $d./dt$ avant de procéder à l'habituelle intégration par partie.
- La variation est faite à extrémités fixes ce qui permet d'annuler les termes de bords.

Enfin notons qu'en chemin vers (9), l'équation suivante a été mise à jour :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta q^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right) dt = 0 \ , \ \forall \delta q \quad (10)$$

Et que cette équation appelée forme faible du problème variationnel de départ est en fait le lieu de l'écriture d'un principe plus général que celui d'Hamilton, celui des travaux virtuels (ou principe de D'alembert [4]) qui permet de prendre en compte des chargements quelconques et en particulier ne dérivant d'aucun potentiel. Finalement, tenant compte de la forme (2) dans (9) on obtient l'habituel modèle dynamique d'un robot manipulateur à base fixe :

[1] Où $T\mathcal{C}$ est le fibré des configurations, i.e. l'espace des positions-vitesses du robot.

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + Q(q) = \tau \qquad (11)$$

Où l'on reconnaît de gauche à droite : les forces généralisée inertielles, de Coriolis-centrifuges, de gravité et enfin de commande, ces dernières dérivant du potentiel : $U_c(q) = -q^T\tau$. Enfin, si la base du robot est mobile et soumise à un mouvement imposé, il suffit d'ajouter à (3) les composantes d'entraînement correspondantes dont les termes dépendant explicitement du temps via des lois horaires ne sont pas affectés par la variation (6)-(7), pour retrouver la dynamique du robot couplée à son support.

2.2 Point de vue géométrique

Jusqu'ici, c'est le point de vue de la mécanique analytique qui a prévalue dans les développements précédents. Voyons à présent quel est le contexte géométrique sous-jacent à cette construction. Tout d'abord, l'espace des configurations se figure comme un hyper-tore, et tout mouvement du robot « dessine » sur ce tore une trajectoire paramétrée par le temps. Qui plus est, à toute trajectoire liant deux points fixés de cet espace on associe une valeur de l'action. Enfin, et afin de situer les points de l'hyper-tore les uns relativement aux autres, nous avons introduit un paramétrage de ce dernier par la donnée du vecteur *q*. Ceci fait de l'espace des configurations du robot une variété permettant de substituer localement à l'espace intrinsèquement courbe qu'est le tore, un espace vectoriel (plat) ou « carte »[2] (cf. Fig.1).

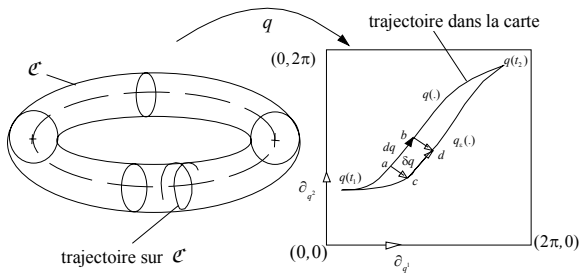

FIG. 1– Variation sur une variété

Une fois ceci dit, et profitant de la structure d'espace vectoriel des cartes locales, la variation d'une trajectoire sur le tore se définit naturellement comme l'antécédent par l'application des coordonnées, de sa variation dans la carte naturellement définie par (6). Qui plus est, la relation de commutation (8) se traduit géométriquement par la relation de clôture du quadrilatère *a*, *b*, *d*, *c* indiqués sur la Fig.1. Enfin, lorsque les forces extérieures sont nulles le lagrangien (2) se réduit à l'énergie cinétique, i.e. à une forme quadratique définie positive des vitesses. Il s'en suit que l'action (4) devient une mesure de la longueur des courbes trajectoires pour la métrique définie par l'énergie cinétique du système. Les solutions des équations de Lagrange sont alors naturellement les géodésiques de cette métrique sur l'hyper-tore de départ. On retrouve ainsi les trajectoires inertielles évoquées dans l'introduction mais ici généralisées à un espace qui n'est plus Euclidien (ou plat) mais Riemannien (ou courbe). Ainsi, réalise t-on que les deux premiers termes de (11) ne sont autres que l'écriture du terme « $m\,\gamma$ » de (1). Et ce, non plus dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique Euclidienne, mais dans $\mathcal{C}$ muni de la métrique « énergie cinétique ». Finalement, les équations (11) s'interprètent comme un équilibre des forces inertielles et extérieures dans les espaces tangents $T_q\mathcal{C}$, de plus étant des équations en forces elles sont naturellement de nature covariante et s'écrivent donc dans la base duale des dq^i , elle même issue de la base naturelle des ∂_{q^i} associée aux coordonnées des cartes. Ce contexte peut être figuré ci dessous, où l'on a représentée la carte locale par un système de lignes de coordonnées dont les vecteurs vitesses coïncident avec les ∂_{q^i} .

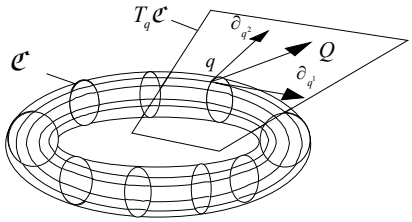

FIG. 2 – Dynamique sur une variété

Finalement écrire les équations de Lagrange revient à écrire « $f_{ext} = m\,\gamma$ » dans le champ de bases naturelles dérivant de la carte des coordonnées généralisées.

3 Dynamique sur un groupe – Mécanique d'Euler-Poincaré

Lorsque Lagrange rédigea son traité de Mécanique Analytique [5], il revint sur un jeu d'équations connu depuis Euler et dont la formulation était mal adaptée à la méthode pourtant générale qu'il venait d'exposer. Ces équations sont celles de la toupie dite Eulerienne, elle s'écrivent dans le cas sans gravité:

$$J\dot{\Omega} + \Omega \times (J\Omega) = 0 \qquad (12)$$

Où J est le tenseur d'inertie de la toupie dans son repère mobile, Ω est le vecteur vitesse angulaire du repère mobile par rapport au fixe exprimé dans lui même. Ces équations étant relatives aux vitesses seules, il nous faut les compléter du modèle cinématique suivant :

$$\dot{R} = R\,\hat{\Omega} \qquad (13)$$

[2] Que l'on se figure ici l'analogie de la terre (espace courbe) représentée par un systèmes de cartes locales et plates réalisant son atlas.

Où R est la matrice rotation des axes mobiles relativement aux fixes et $\hat{\Omega}$ est l'unique matrice antisymétrique associée à Ω.

Tout d'abord notons la simplicité (et la beauté) de ces équations par rapport aux équations que l'approche lagrangienne nous aurait données. En effet dans ce dernier cas, l'usage aurait voulu que nous adoptâmes un jeu de coordonnées généralisées (par exemple 3 angles d'Euler) brisant ainsi la « symétrie naturelle » et introduisant des nonlinéarités artificielles et des singularités associées.

En fait, de telles équations sont accessibles dans un cadre général révélé par Poincaré en 1901 [6]. La construction de Poincaré est basée sur la notion de groupe de Lie. En effet, les configurations de la toupie peuvent être décrites sans ambiguïté par l'action de transformations sur le trièdre fixe, transformations dont la composition satisfait aux axiomes d'un groupe[3]. Un groupe de Lie G est en général non commutatif (ex. de la toupie) et dans ce cas on le figure comme un espace courbe (cf. Fig. 3) avec un point arbitrairement distingué prenant le sens de son élément neutre (on le notera 1). Dans la mécanique de Poincaré, on assimilera dès que possible l'espace des configurations du système au groupe de ses transformations, i.e. on posera : $\mathcal{C} := G$. Ainsi, à tout mouvement du système correspond une courbe paramétrée sur G, que l'on notera :

$$g(.) : t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) \in G \qquad (14)$$

Où g dénote génériquement une transformation de G, i.e. l'un de ses points. Dans la suite nous supposerons G représenté par un groupe de matrices (par exemple les matrices rotations pour $G = SO(3)$, les transformations homogènes, quand $G = SE(3)$ …). L'espace tangent à l'identité s'identifie aux perturbations linéaires d'une configuration de référence, i.e. aux transformations infinitésimales dites « matérielles ». Cet espace vectoriel est naturellement muni d'une opération que l'on appelle crochet de Lie, notée [.,.], qui « mesure » la non-commutativité des transformations infinitésimales. Ainsi muni, il réalise l'algèbre de Lie de G, notée $\mathfrak{g}$, par ex. : les vitesses angulaires pour la toupie ($\mathfrak{g} = so(3)$), les torseurs cinématiques pour le solide rigide ($\mathfrak{g} = se(3)$), etc… Vecteurs que nous nommerons sous le terme générique de « twists ». L'un des intérêts de ce concept est de relier les vecteurs vitesse sur G à un unique vecteur dans l'algèbre de Lie $\hat{\xi}$ selon la formule suivante, dont (13) est un cas particulier [7]:

$$\dot{g} = g\hat{\xi} = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g\exp(\varepsilon\hat{\xi}) \qquad (15)$$

Où l'opérateur « exp » est définit au sens des matrices et se figure géométriquement comme une « projection naturelle » de T_1G sur G (cf. Figure 3).

Une fois ceci dit, le propos de la mécanique de Poincaré est d'établir l'évolution d'un système dont l'espace des configurations est un groupe de Lie directement en terme de ses transformations et non pas (comme dans l'approche précédente due à Lagrange) en terme de ses paramètres. Notons ici que dans le cas de la toupie où $G = SO(3)$, l'approche de Poincaré doit conduire aux équations d'Euler (12). Nous allons à présent rapidement brosser les grandes lignes de cette construction en reconduisant le cadre lagrangien tel que précédemment invoqué au cas d'un groupe G non forcément commutatif.

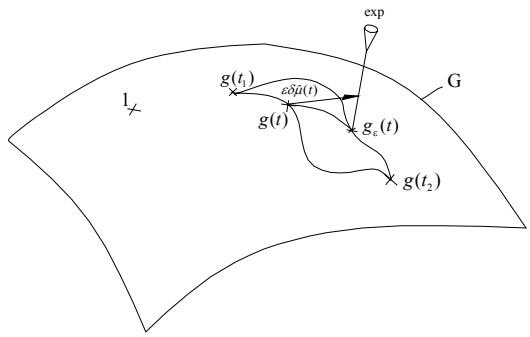

FIG. 3 – Variation sur un groupe

En accord avec l'objectif annoncé, nous partirons d'un lagrangien directement défini sur le groupe par :

$$(g, \dot{g}) \in TG \mapsto L(g, \dot{g}) = T(g, \dot{g}) - U(g) \in \mathbb{R}$$

A ce niveau, et c'est ici que réside l'intérêt de la structure de groupe, point n'est besoin de recourir à une carte pour définir une variation de l'action qui s'écrit à présent grâce à (15):

$$A(g(.)) = \int_{t_1}^{t_2} L(g, \dot{g})\, dt \triangleq \int_{t_1}^{t_2} l(g, \xi)\, dt$$

En effet la loi de composition du groupe permet de remplacer (6) par :

$$t \mapsto g_\varepsilon(t) = g(t)\exp(\varepsilon\delta\hat{\eta}(t)) \qquad (16)$$

Où géométriquement $g_\varepsilon(t)$ représente la configuration perturbée du système à t fixé alors qu'on applique à la configuration de référence le vecteur variation $\delta\hat{\eta}(t)$ (cf. Fig. 3, où : $\hat{\mu} = g\hat{\eta}g^{-1} \triangleq Ad_g(\hat{\eta})$, est une transformation infinitésimale dite « spatiale »). Techniquement, le calcul des variations de Poincaré procède encore à partir de (7) avec (16) en lieu et place de (6) et nécessite de recourir au

[3] Ce groupe pouvant lui même être paramétré par un système de coordonnées (comme les angles d'Euler), il réalise aussi une variété, et les deux structures : « groupe + variété » réalisent un groupe de Lie.

pendant de la relation de commutation (8) qui en vertu de la non commutativité (courbure) du groupe impose à une variation à droite de vérifier la contrainte:

$$d\delta\hat{\eta}/dt = \delta\hat{\xi} - ad_{*\hat{\xi}}(\delta\hat{\eta}) \qquad (17)$$

Où $ad_{*\hat{\xi}}(.) = [\hat{\xi},.]$ est dite « action adjointe de $\hat{\xi}$ sur $\mathfrak{g}$ ». Finalement, sous toutes ces conditions, le calcul des variations donne les équations dites de Poincaré [6] :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial \xi}\right) - ad^*_{\xi}\left[\frac{\partial l}{\partial \xi}\right] - X_g(l) = 0 \qquad (18)$$

Où $ad^*_{\xi}(.)$ est l'action co-adjointe de ξ sur le dual de l'algèbre de Lie de G noté $\mathfrak{g}^*$ (l'espace des couples pour la toupie, des torseurs d'efforts pour le solide rigide) et $X_g(l)$ se détaille selon :

$$X_g(l) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} l(g_\varepsilon, \xi) \qquad (19)$$

A ce niveau, notons comme le souligne Poincaré, que ces équations sont particulièrement pertinentes lorsque le lagrangien l ne dépend pas de la configuration. Par exemple dans le cas de la toupie sans gravité, on a :

$$l(\Omega) = 1/2\ \Omega^T J \Omega$$

Et, comme $ad^*_{\Omega}(.) = -\Omega \times (.)$, il s'en suit que (18) redonne bien (12). Dans le cas général, cette propriété d'indépendance de l vis à vis des transformations est liée au théorème de Noether et à la théorie de la réduction (ici lagrangienne). Dans ce cas de figure, le lagrangien de départ L est invariant à gauche, i.e. vérifie : $L(g,\dot{g}) = L(hg, h\dot{g})$, $\forall h \in G$. Aussi, a t-on comme annoncé, en prenant $h = g^{-1}$: $L(g^{-1}g, g^{-1}\dot{g}) = L(1,\xi) = l(\xi)$. Finalement les équations de Poincaré (18) voient dans ce cas le terme $X_g(l)$ disparaître, ne dépendant plus ainsi de la configuration courante g. Cette propriété d'invariance a son pendant à droite tout comme les équations (18), puisque les perturbations réelles (15) et virtuelles (16) peuvent se faire à droite (perturbations de la configuration courante et non de celle de référence comme dans le contexte à gauche). Ces deux propriétés d'invariance (gauche et droite) traduisent respectivement la symétrie de la dynamique par rapport à l'espace et la matière. Enfin, notons que les équations (18) s'écrivent naturellement dans une base de $\mathfrak{g}^*$. Or, $\mathfrak{g}$ peut aussi être défini comme l'espace des champs invariants gauches $(g \mapsto X_\alpha(g) = g\hat{e}_\alpha, \in T_g G, \alpha = 1,...\dim(G))$ où les $\hat{e}_\alpha$ engendrent une base de $T_1 G$. De ce point de vue, les équations (18) sont en coordonnées, les équations de la dynamique dans un champ de bases locales duales non intégrables puisque : $[X_\alpha, X_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma \neq 0$, i.e. dans un co-repère mobile de G ne dérivant d'aucune carte sous jacente (cf. Fig.4) [8]. Ce point de vue est à mettre en rapport avec celui de Lagrange et la Figure 4 avec la Figure 3. Enfin, notons que l'invariance droite est dominante en mécanique du fluide, la gauche, en mécanique du solide. Dans ce dernier cas, elle a été activement exploitée en robotique notamment dans l'algorithmique de Newton – Euler telle que nous allons à présent la rappeler.

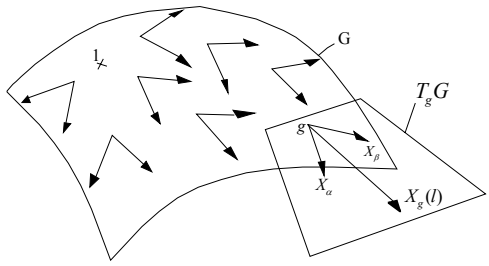

FIG. 4 – Dynamique sur le groupe

4 Approche de Newton-Euler des Robots manipulateurs

Dans ce cas, l'espace des configurations du manipulateur s'identifie à l'espace des applications de l'ensemble des indices discrets des corps du robot sur le groupe des configurations des corps isolés, i.e, dans le cas d'un robot tridimensionnel :

$$\mathcal{C} := \{g_. / g_. : i \in \{1,2,...n\} \mapsto g_i \in SE(3)\} \qquad (20)$$

Où les g_i sont des transformations homogènes assujetties à vérifier les équations de contrainte holonomes imposées par le modèle géométrique de la chaîne :

$$j = 1,...n : \quad g_j = g_{j-1}.h_j \qquad (21)$$

Et h_j est la transformation relative de S_j / S_{j-1} imposée par la liaison connectant ces deux corps. Dérivant (21) par rapport au temps et en faisant apparaître les twists $\xi_j = (g_j^{-1}\dot{g}_j)^\vee$ et $\upsilon_j = (h_j^{-1}\dot{h}_j)^\vee$, (21) impose:

$$j = 1,...n : \quad \xi_j = {}^j\mathbb{T}_{j-1}\ \xi_{j-1} + \upsilon_j \qquad (22)$$

Où ${}^j\mathbb{T}_{j-1}$ est la matrice 6×6 associée à l'action $Ad_{h_j}(.)$ sur les twists de $se(3) \cong \mathbb{R}^6$. Notons ici que (22) n'étant pas intégrable, il n'existe pas de principe intégrale de type Hamilton menant aux équations de la dynamique. Néanmoins, le principe (local) des travaux virtuels est toujours valable et s'écrit ici pour $\forall \delta\eta_j$ indépendants entre eux:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta\eta_j^T \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l_j}{\partial \xi_j}\right) - ad^*_{\xi_j}\left(\frac{\partial l_j}{\partial \xi_j}\right) - X_{g_j}(l_j) - \lambda_j + {}^{j+1}\mathbb{T}_j^T \lambda_{j+1}\right) = 0 \tag{23}$$

Où les l_j sont les lagrangiens des corps libres :

$$l_j(g_j, \xi_j) = T_j(\xi_j) - U_j(g_j) \tag{24}$$

Et les λ_j sont les torseurs de liaisons assurant les mouvements imposés par la commande et les contraintes de conception représentées par (22). Dans ces conditions, avec :

$$T_j(\xi_j) = 1/2\ (\Omega_j^T, V_j^T)\begin{pmatrix} J_j & m\hat{s}_j^T \\ m\hat{s}_j & m_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega_j \\ V_j \end{pmatrix} \tag{25}$$

L'équation (23) donne les équations de Newton-Euler des corps isolés, i.e. pour $j = 1,..n$ (où γ_g est l'accélération de la gravité) :

$$\begin{pmatrix} J_j & m\hat{s}_j^T \\ m\hat{s}_j & m_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\Omega}_j \\ \gamma_j - \gamma_g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_j \times (J_j \Omega_j) \\ \Omega_j \times (\Omega_j \times m s_j) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_j - {}^{j+1}\mathbb{T}_j^T \lambda_{j+1} \tag{26}$$

Où l'on a utilisé l'action co-adjointe de $se(3)$ sur $se(3)^*$:

$$ad^*_{\binom{\Omega}{V}}\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \times \Omega + f \times V \\ f \times \Omega \end{pmatrix} \tag{27}$$

Enfin, et pour les besoins de l'algorithmique (21), (22) et (24) sont complétées des contraintes sur les accélérations déduites par dérivation de (22). In finé, ces équations sont vues comme des récurrences sur les efforts, positions, vitesses et accélérations des segments, initialisées par le mouvement imposé à la base et les efforts imposés à l'outil [3]. Notons que ces modèles connus sous le nom de « modèle de Newton-Euler » ont été étendus au cas des robots flexibles dans le cadre de l'approche dite du repère flottant [9]. Rappelons que dans ce cas le mouvement des corps déformables résulte des perturbations modales des mouvements d'ensemble rigides affectant des repères dit « flottants ». Aussi la démarche précédente se reconduit t-elle à l'identique, en prenant comme groupe de configuration $G = SE(3) \times \mathbb{R}^m$ où m est le nombre de modes choisis pour décrire la déformation de chaque corps.

5 Approche « macro-continue » des robots hyper redondants

Cette approche a été récemment développée dans le cadre du projet Robea « Robot Anguille ». Elle est adaptée à la modélisation des robots manipulateurs (« robots trompes »), ou locomoteurs (« robots serpents »), réalisés par la connexion sérielle de nombreux segments. Dans ce cas, il devient pertinent de substituer aux modèles discrets tels qu'introduits précédemment, un modèle continu. Cette idée fut initialement proposée par Burdick et Chirikan : [10,11], mais ces auteurs n'ont pas dépassé le cadre cinématique. Pour franchir cette limite, l'idée est de recourir à un modèle de poutre connu sous le terme de « poutre Cosserat » du nom des deux frères : Eugène et Francois, qui au début du 20ième siècle et à la suite des travaux de Poincaré mirent en place un cadre similaire étendu aux milieux continus [12]. L'idée est ici d'assimiler une poutre à un empilement continu de sections rigides. En donnant 6 ddls à chaque section on induit les 6 champs de déformation que sont : les 2 courbures, la torsion, l'extension ainsi que deux champs de cisaillement transverse. Pour ce qui concerne les robots hyper-redondants, les segments seront assimilés aux sections rigides de la poutre Cosserat et selon la cinématique inter-segment, certaines des déformations de la poutre seront actionnées ou non. Mathématiquement, le cadre général de ces modèles peut se déduire directement du précédent en remplaçant l'indice discret *j* par un indice continu *X* représentant l'abscisse matérielle de la poutre le long de sa plus grande dimension et étiquetant les sections (selon le point de vue lagrangien de la mécanique des milieux continus). Ainsi, l'espace des configurations de la poutre Cosserat modélisant le manipulateur hyper-redondant est-il défini par un espace fonctionnel de courbes sur le groupe de Lie de ses sections :

$$\mathcal{C} := \{g(.)/g(.) : X \in [0,1] \mapsto g(X) \in SE(3)\} \tag{28}$$

Avec en représentation matricielle:

$$g(X) = \begin{pmatrix} R(X) & r(X) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où r dénote le champ de position le long de l'axe matériel de la poutre et R représente le champ d'orientation des trièdres $(t_1, t_2, t_3)(X)$ attachés matériellement à ses sections (avec t_1 normale unitaire à la section). Notons ici, que si la transformation *g* dépend explicitement de *X*, elle dépend aussi implicitement de *t* au travers des équations de la dynamique recherchées. Aussi noterons nous par un « prime » l'opérateur « $\partial_X.$ » et par un « point » : « $\partial_t.$ ». Qui plus est, on aura deux types de twists : les vitesses que nous noterons $\xi_o = (g^{-1}\dot{g})^\vee$, et ceux associés aux transformations infinitésimales des repères sections lorsque l'on se

déplace à temps fixé le long de l'axe matériel du « robot poutre ». Ces derniers seront notés $\xi_1 = (g^{-1}g')^{\vee}$ et interviennent dans les mesures des déformations de la poutre. Une fois ce cadre posé, et contrairement au cas précédent, la dynamique peut ici se déduire du principe intégrale d'Hamilton appliqué au lagrangien augmenté:

$$l(g,\xi_o,\xi_1) = \int_0^1 \mathcal{T}(\xi_o) - \mathcal{U}(g) - \lambda^T F \, dX \qquad (29)$$

Où $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ sont à présent des densités d'énergie cinétique et potentielle et λ est un champ de torseur interne forçant les contraintes holonomes imposées par la conception et la commande qui prennent la forme générale:

$$F(t, X, \xi_1(X)) = 0 \qquad (30)$$

Alternativement, les équations de la dynamique des robots redondants se déduisent d'un jeu d'équations que nous appellerons « équations de Poincaré – Cosserat » puisqu'il réalise une généralisation des équations de Poincaré au cas d'un milieu Cosserat de dimension quelconque (i.e. un agglomera de micro-solides rigides). Les voici à présent telles qu'elles figurent dans [13], i.e. dans le cas général où le lagrangien ne présente pas de symétrie :

$$\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i}\right) - ad^*_{\xi_i}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i}\right]\right) - X_g(\mathcal{L}) = \overline{\lambda} \qquad (31)$$

Avec dans le cas d'une poutre (milieu Cosserat mono-dimensionnel) : $p = 1$ et $(x^o, x^1) = (t, X)$, tandis que $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} - \lambda^T F$, $X_g(\mathcal{L})$ est encore défini par (19), et $\overline{\lambda}$ représente une éventuelle densité de torseurs extérieurs appliquée le long du robot. Notons que (31) réalise un jeu d'équations aux dérivées partielles sur l'intérieur du domaine et qu'il se doit en tant que tel d'être complété de conditions aux limites dont la forme générale est donnée dans [13]. Afin de fixer les idées, considérons par exemple le cas d'un manipulateur hyper - redondant réalisé par l'empilement sériel de plates-formes parallèles de type rotule. Remplaçons ce robot par une poutre homogène et plaçons les trièdres mobiles des sections sur l'axe matériel supposé passer par les centres de masse des dites sections. Dans ce cas le lagrangien va s'écrire :

$$l = \int_0^1 \frac{1}{2}(\Omega^T, V^T)\begin{pmatrix}\rho J\Omega \\ \rho A V\end{pmatrix} - \rho A\, \gamma_g^T r \, dX + \int_0^1 (M^T, N^T)\begin{pmatrix} K - K_d \\ R^T(r' - t_1)\end{pmatrix} dX \qquad (32)$$

Où le premier terme sous l'intégrale représente la densité d'énergie cinétique du robot avec : A, l'aire de la section, J, son tenseur d'inertie géométrique dans le repère section, et ρ la masse volumique du robot. Le second terme n'est autre que la densité d'énergie potentielle de gravité. Quant au troisième, il représente la contribution imposée par les contraintes qui sont dans ce cas :

$$r'(X) = t_1(X) \;, \qquad K(X) = K_d(X,t) \qquad (33)$$

La première traduit la cinématique des poutres de Kirchoff, pendant infinitésimal de la liaison rotule. Elle est donc imposée par la conception. La seconde quant à elle, impose au champ de courbure-torsion $\hat{K} = R^T R'$ une évolution dans le temps spécifiée par la commande. Finalement, N et M sont les champs de réaction interne et de couple de commande imposés au robot et évalués dans les repères des sections. Appliquons à présent (31) à (32), il vient :

$$\begin{pmatrix}\rho J\dot{\Omega} + \Omega \times (\rho J \Omega) \\ \rho A \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho A \gamma_g\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M' + K \times M + R^T t_1 \times N \\ N' + K \times N\end{pmatrix} \qquad (34)$$

Par comparaison avec (26), notons que ce modèle n'est autre que le modèle des efforts de Newton-Euler ici généralisé au cas d'un robot manipulateur continu. Reste à compléter ce modèle du modèle géométrique imposé par les contraintes (33) qui se réécrivent (en posant : $e_1 = (1,0,0)^T$):

$$r' = R.e_1 \quad , \qquad R' = R.\hat{K}_d \qquad (35)$$

ainsi que de ses dérivées première et seconde par rapport au temps, pour obtenir le modèle de Newton-Euler de ce robot hyper-redondant. Enfin, il nous faut ajouter les conditions aux bords en force : $N(1) = M(1) = 0$, et en mouvement : $r(0) = r_o$, $R(0) = R_o$.

6 Dynamique sur un fibré principal : les robots locomoteurs

6.1 Introduction

A l'origine, la problématique de la locomotion en robotique est apparue avec les robots mobiles dits non-holonomes. Par la suite, d'autres solutions que les traditionnelles roues actionnées ont été proposées pour répondre à l'objectif de locomotion. Ces solutions sont aujourd'hui essentiellement inspirées des principes locomoteurs des animaux. Aussi, tout un bestiaire de « robots locomoteurs », tels que robots poissons, robots insectes, marcheurs ou volants… est apparu dans le champ d'une robotique dite « bio-mimétique ». L'étude de ces systèmes a aujourd'hui trouvé son cadre géométrique dans la théorie des fibrés et des connexions [14], que nous allons à présent introduire. Par « robot

locomoteur », nous entendons ici un système multi-corps dont certains degrés de liberté articulaires sont contrôlés de manière à ce que l'un de ses corps, que nous appellerons « corps de référence », se déplace dans l'espace ambiant de manière attendue. La propulsion se fait ici via des forces de réaction sur lesquelles le système s'appuie pour se déplacer. Ces efforts peuvent par exemple être les contacts non persistants d'un robot à pattes, ou ceux exercés par un fluide sur les corps élémentaires du robot dans le cas d'un robot nageur ou volant… Notons que les traditionnels robots mobiles à roues entrent dans cette classe de système, les roues représentant alors les corps s'appuyant sur l'environnement pour mouvoir le corps de référence qu'est la caisse du robot.

Comme dans le cas de la manipulation, tout part encore de la définition de l'espace des configurations d'un robot locomoteur. Notons en premier lieu, que contrairement au cas d'un robot manipulateur, un robot locomoteur possède des degrés de liberté (ddls) de deux natures distinctes. Les premiers sont les ddls internes (que nous supposerons au nombre de n) relatant la configuration relative des corps constitutifs du robots (i.e. sa « forme »), les seconds sont les ddls externes traduisant les changements de situation (position-orientation) de son corps de référence dans l'espace ambiant. Sur la base de cette remarque, l'approche lagrangienne telle que présentée dans la section 2 peut être naturellement étendue aux robots locomoteurs en substituant à la variété des configurations internes, l'espace suivant qui réalise la forme la plus générale de l'espace des configurations d'un robot locomoteur :

$$\mathcal{C} := G \times S \tag{36}$$

Où G est un sous groupe de $SE(3)$ ou $SE(3)$ lui même et $S := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \ldots \mathbb{S}^1}_{n \text{ copies}}$ est l'espace des formes internes du robot (appelé «Shape space » dans la littérature anglo-saxone).

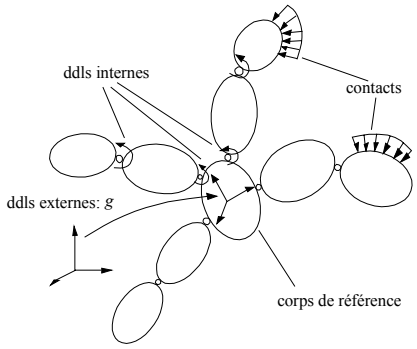

FIG. 4 – Robot locomoteur

Un tel espace ($\mathcal{C}$) définit du point de vue géométrique ce que l'on nomme un fibré principal trivial. « Principal » car la fibre est ici un groupe, « trivial » car le produit (36) est défini globalement et non localement comme dans le cas le plus général de la théorie des fibrés. Enfin, au dessus de chaque point de la variété des formes (une configuration interne donnée), on définit une infinité de postures possibles du corps de référence engendrant ainsi la fibre, ici le groupe G (cf. Fig. 5). Avant d'appréhender le problème de dynamique sur un tel espace, nous allons introduire un concept fondamental de la théorie des fibrés, celui de « connexion ». Dans ce qui suit l'espace des formes sera muni d'un système de coordonnées articulaires : $r = (r^1, r^2, \ldots r^n)^T$.

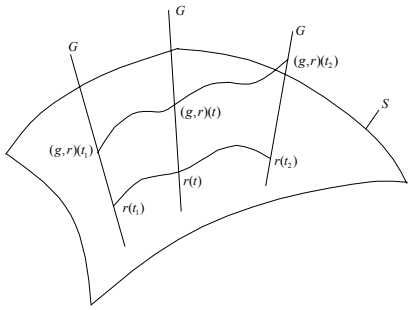

FIG. 5 – Espace fibré

6.2 Connexion sur un fibré principal

Le concept de connexion est probablement l'un des plus féconds de la physique mathématique. C'est notamment celui qui préside à l'unification des 4 interactions de la physique des particules [14]. Dans le domaine de la robotique et plus largement de la mécanique classique, la théorie des connexions apparaît essentiellement en 2 circonstances : 1°) lorsque le système présente des symétries et des lois de conservation associées (théorème de Noether), 2°) lorsque le système est contraint par des liaisons non-holonomes. Du point de vue mathématique ce concept fut historiquement introduit pour la géométrie riemannienne (on parle alors de connexion riemannienne) et systématisé dans une cadre plus abstrait par H.Weyle [15], dans le cadre de la théorie des fibrés principaux.

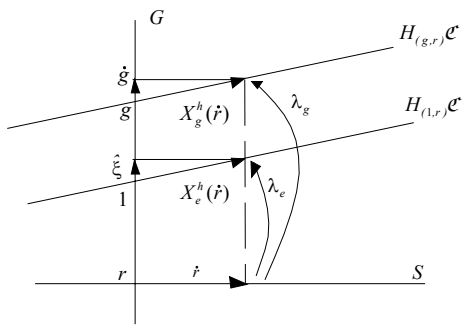

FIG. 6 – Connexion sur un fibré principal

Intuitivement, et comme son nom l'indique, une connexion sur un fibré principal définit un moyen de relier les déplacements sur la variété de base aux déplacements dans la fibre. Qui plus est, pour définir une

connexion, une telle relation, que nous supposerons linéaire, se doit de vérifier la propriété élémentaire suivante : les déplacements relatifs dans la fibre son indépendants de la position courante occupée par le système dans cette dernière. Cette propriété d'invariance, ajoutée aux précédentes, conduit à définir analytiquement une connexion comme :

$$\xi + A(r)\dot{r} = 0 \qquad (37)$$

Où A est appelée « 1-forme de connexion locale ». puisqu'elle associe localement à tout vecteur de la base $\dot{r}$ un vecteur ξ de l'algèbre de Lie de la fibre. Qui plus est (37) définit sur le fibré une distribution, c'est à dire qu'en tout point (g,r) du fibré, les vecteurs $(\dot{g},\dot{r})$ vérifiant (37) engendre un sous espace vectoriel de $T_{(g,r)}\mathcal{C}$ appelé espace horizontal et noté $H_{(g,r)}\mathcal{C}$. Cet espace peut lui même être pris comme définition de la connexion et son usage permet de figurer géométriquement le « fonctionnement » de cette dernière comme sur la Fig . 6., où $X^h_{\cdot}(\dot{r}) = \lambda_{\cdot}(\dot{r})$ dénote le relèvement horizontal d'un vecteur de la base sur le fibré (c'est le transport parallèle pour une connexion riemannienne). Nous allons à présent illustrer cette définition dans les deux cas de figure directement concernés par la robotique.

1°) Symétries et conservations

Considérons le cas d'un système poly-articulé en orbite (par exemple un bras manipulateur fixé à une navette spatiale, ou plus simplement un satellite commandé en attitude par des roues d'inertie). Dans ce cas, si l'on ne s'intéresse qu'à l'attitude R du corps de référence, le fibré des configurations est $\mathcal{C} := SO(3)\times S$ et du fait de l'absence de forces extérieures, le moment cinétique du système est conservé forçant donc la relation suivante, dans le cas où le système est initialement immobile:

$$\sigma = \partial l / \partial \mu = 0 \qquad (38)$$

Où σ et μ sont respectivement le moment cinétique total et la vitesse angulaire du corps de référence du système (la navette spatiale, la caisse du satellite…) dans le repère fixe et $l(R,\mu,r,\dot{r})$ est le lagrangien du système dans le repère fixe (avec R la matrice d'orientation du corps de référence). En terme des vitesses angulaires dans le repère mobile, (38) se réécrit :

$$p = J\xi + \alpha\dot{r} = 0 \qquad (39)$$

Où l'on a introduit le moment cinétique dans le repère mobile : $p = R^T\sigma$. Ainsi, (39) est bien de la forme (37) avec: $A(r) = J^{-1}(r)\alpha(r)$, que l'on nomme « connexion mécanique » et qui permet par exemple d'expliquer comment un chat qui tombe dans la gravité peut se redresser sans s'appuyer sur son environnement [16].

2°) Robots mobiles non-holonomes

Lorsqu'un robot mobile à roues « possède » autant de contraintes de non dérapage et de roulement sans glissement indépendantes que le groupe G (de $\mathcal{C}$) a de dimensions alors le robot est contrôlable cinématiquement via un modèle de la forme (37), où A est la matrice de commande d'un système sans dérive sur le groupe G [17], et du point de vue de la géométrie des fibrés se nomme « connexion cinématique principale » [18].

6.3 Dynamique des robots locomoteurs (cas non contraint)

Pour établir les équations de la dynamique d'un tel système, on définit généralement une connexion sur son fibré principal. Ici nous adopterons une démarche différente en n'invoquant que la structure de groupe [13]. Pour cela il nous suffit de substituer à la définition intrinsèque de l'espace des configurations (36), celle issue du paramétrage de S, i.e. : $\mathcal{C} := G\times\mathbb{R}^n$, et de remarquer que $\mathcal{C}$ réalise alors un groupe de Lie dont les transformations sont génériquement notées h et dont la loi de composition interne est définie par:

$$h_1, h_2 \in \mathcal{C},\ h_1 \circ h_2 = \begin{pmatrix} g_1 \\ r_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_2 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ r_1 + r_2 \end{pmatrix}$$

Où les g figurent encore des matrices représentant les déplacements du corps de référence. Ainsi, l'espace des configurations du robot étant à présent un groupe, il suffit d'appliquer les équations de Poincaré au lagrangien :

$$(h,\dot{h}) \in T\mathcal{C} \mapsto l(h,\bar{\xi}) = T(r,\bar{\xi}) - U(h) \in \mathbb{R} \qquad (40)$$

Où $\bar{\xi}$ représente un twist de $\mathfrak{g}\times\mathbb{R}^n$ (l'algèbre de Lie de $G\times\mathbb{R}^n$) défini par:

$$\bar{\xi} = (\Omega^T, V^T, \dot{r}^T)^T = (\xi^T, \dot{r}^T)^T$$

Dans ces conditions :

$$\overline{ad}^*_{\begin{pmatrix}\xi\\ \dot{r}\end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \lambda \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad^*_{\xi}(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$$

est l'action co–adjointe de l'algèbre de Lie de $G\times\mathbb{R}^n$ sur son dual (Q est ici un vecteur force généralisée appliqué sur les ddls internes), et $ad^*_{\cdot}(.)$ est toujours l'action co-adjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$. Enfin, le terme (19) prenant en charge le défaut de symétrie du lagrangien s'écrit ici:

$$X_g(l) = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_r l \end{pmatrix}$$

Et (18) donne :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\partial l/\partial\xi\\ \partial l/\partial\dot r\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}ad^*_\xi\left(\partial l/\partial\xi\right)\\ \partial l/\partial r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \tau\end{pmatrix} \qquad (41)$$

Que l'on rencontre quelques fois sous le nom d'équations d'Hamel [19] et qui se doivent d'être complétées de l'équation dite de connexion :

$$(g^{-1}\dot g)^\vee=\xi=\mathbb{J}^{-1}p-A(r)\dot r \qquad (42)$$

déduite de $p=\partial l/\partial\xi=\mathbb{J}\xi+\alpha\dot r$, où $\mathbb{J}(r)\,(=J$ dans (39)) est le tenseur d'inertie à articulations bloquées du système, ou « locked inertia tensor » dans la littérature anglo-saxonne, et $A=\mathbb{J}^{-1}\alpha$ s'interprète comme la 1-forme locale de sa connexion mécanique. Enfin, (41) et (42) doivent être complétées de la dynamique des ddls internes, déduite de la seconde ligne de (41) en y substituant p à ξ grâce à (42).

6.4 Le cas contraint : Systèmes non-holonomes dynamiques

Reconsidérons le cas d'un robot mobile à roues. Nous avons vu que lorsque la fibre était complètement contrainte par les conditions de non dérapage et de roulement sans glissement, la dynamique dans cette dernière dégénérait en un simple modèle cinématique s'interprétant du point de vue de la géométrie du fibré, comme une équation de connexion dite « principale ». On conçoit aisément qu'entre ces deux extrêmes (cas libre et totalement contraint), il existe des systèmes, tels le « snake-board » [20], dont la fibre est partiellement contrainte. Dans ce cas, le mouvement du système non-holonome dans la fibre ne peut être décrit sans son modèle dynamique. Qui plus est, en raison de la non-holonomie des contraintes, ce modèle ne peut être dérivé d'un principe intégrale de type Hamilton, mais de la forme faible (locale) des travaux virtuels qui s'écrit alors dans l'algèbre de Lie de la fibre:

$$\delta\psi^T\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial\xi}\right)-ad^*_\xi\left(\frac{\partial l}{\partial\xi}\right)-\lambda_i\omega^i\right]=0\ ,\ \forall\delta\psi\in\mathfrak{g} \qquad (43)$$

Où $\lambda_i\omega^i$, $i=1,...m$ est le vecteur des forces généralisées associées aux contraintes modélisées par les m 1-formes invariantes à gauche sous l'action de G:

$$\omega^i(\xi,r,\dot r)=0\ ,\ \forall(g,g\hat\xi,r,\dot r)\in TG\times TS \qquad (44)$$

A ce niveau, il est naturel d'introduire l'espace (dit « admissible ») des twists compatibles avec les contraintes:

$$D:=\left\{\xi\in\mathfrak{g}\,/\,\omega^i(\xi,r,0)=0,\ i=1,..m\right\}, \qquad (45)$$

Et de construire une base de cet espace en tout point de S:

$$D:=\left\{\mathrm{span}(f_\alpha(r))_{\alpha=1,...k}\,/\,\omega^i(f_\alpha,r,0)=0,\ i=1,..m\right\} \qquad (46)$$

Où $k=\dim(G)-m$, est la dimension de l'espace admissible. Ainsi, en prenant une variation compatible avec les contraintes, (43) nous donne les équations dynamiques réduites sur la fibre:

$$f_\alpha^T\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial\xi}\right)-ad^*_\xi\left(\frac{\partial l}{\partial\xi}\right)\right]=0\ ,\ \alpha=1,...k \qquad (47)$$

De plus, en introduisant le co-vecteur moment cinétique généralisé admissible (ou « réduit ») :

$$p_a=(f_1^T\frac{\partial l}{\partial\xi},...f_k^T\frac{\partial l}{\partial\xi}) \qquad (48)$$

(47) permet d'écrire la dynamique du moment réduit :

$$\dot p_{a,\alpha}=f_\alpha^T ad^*_\xi(\partial l/\partial\xi)+\dot f_\alpha^T(\partial l/\partial\xi) \qquad (49)$$

Reste à relier le mouvement dans la fibre à l'évolution de ce moment réduit et des ddls internes. Là encore c'est une équation de connexion du type (37) qui joue ce rôle. Elle se déduit des m contraintes (44) complétées de la définition (48) des k composantes du moment réduit. Finalement, la dynamique des ddls internes se déduit encore de la seconde ligne de (41) en y substituant p_a à ξ grâce à l'équation de connexion.

7 Le point de vue de Newton-Euler appliqué aux robots locomoteurs

Si le cadre lagrangien de la dynamique des robots locomoteurs est aujourd'hui bien maîtrisé, le formalisme de Newton-Euler n'a pas encore été étendu dans ce domaine. Néanmoins, il est en passe de l'être dans le contexte du projet Robea « Robot Anguille ». Sans pour autant entrer dans les détails des résultats théoriques de ce projet (en cours), notons qu'il suffit, pour capturer les modèles attendus, d'ajouter aux modèles récursifs de la géométrie et des efforts (tels qu'on les rencontre déjà sur les manipulateurs), le modèle dynamique du corps de référence. Ce modèle dynamique fournira les situations, vitesses et accélérations réclamées par l'initialisation des récurrences susnommées. Ainsi, que le robot locomoteur soit discret (poly-articulé), ou continu (hyper-redondant), il nous faudra établir les équations sur la fibre de l'espace des configurations (36). Dans le premier cas, le contexte est celui de la sous-section 6.3. Dans le second, l'espace des formes se définit comme un espace fonctionnel de courbes dans $se(3)$, paramétrées par l'indice continu du robot. Notons que ce contexte a également été étendu aux locomoteurs contraints dans le cadre du même projet. Finalement, en accord avec la « philosophie » de Newton-

Euler, le modèle dynamique sur la fibre est calculé récursivement grâce à la notion de corps augmenté [21].

8 Conclusion

Dans cet exposé, nous avons relaté les liens entre géométrie et dynamique des robots. Le point de vue adopté est celui du calcul des variations lagrangien. Les systèmes étudiés vont des traditionnels robots manipulateurs aux robots locomoteurs bio-inspirés en passant par les robots hyper-redondants pour lesquels un nouveau paradigme a été proposé. Reste à dégager les bénéfices pragmatiques que l'on peut tirer de ces enseignements. Tout d'abord, comme cela a été évoqué précédemment, les formulations les « plus proches » de la réalité géométrique de l'espace des configurations du robots conduisent à des équations compactes, sans non-linéarités extrinsèques artificielles, sans singularités ni changements de cartes, et exhibant les symétries naturelles du système… Sur le plan numérique, la recherche d'algorithmes (interpolation, optimisation, intégration, etc…) sur de tels espaces est un enjeu crucial de la « mécanique – géométrique » aujourd'hui en pleine expansion et qui devrait à terme, permettre d'améliorer les performances (précisions, convergence, robustesse, rapidité, simplicité…) des futurs simulateurs dynamiques de robot. Du point de vue de la commande, l'efficacité de l'approche géométrique n'est plus à prouver tant elle est à l'origine de nombre des grands succès de la commande non-linéaire.

Références

[1] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* ed. et trad. : F. Cajori, University of California Press, 1934.

[2] S. Weinberg, *General relativity,* Masson, 1992.

[3] W. Khalil, E. Dombres, *Modélisation et commande des robots,* Hermess, 2002.

[4] H. Goldstein, *Classical Mechanics* , Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.

[5] J.L. Lagrange, *Œuvres complètes,* Jacques Gabay, 1998.

[6] H. Poincaré, Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique, *Compte rendu de l'académie des sciences de Paris*, Vol. 132, pp. 369-371, 1901.

[7] V.I. Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Annales de l'institut J. Fourier*, Vol. 16(1), pp. 319-361, 1966.

[8] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repère mobile*, Gautier-Villar, 1937.

[9] F. Boyer, P. Coiffet, Generalisation of Newton-Euler model for flexible manipulators , *Journal of robotic systems*, Vol. 13(1), pp. 11-24, 1996.

[10] G.S. Chirikjan, J.W. Burdick, An obstacle avoidance for hyper-redundant manipulators , *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, May, pp. 14-17, 1990.

[11] G.S., Chirikjian, J.W. Burdick, The kinematics of Hyper-redundant Robot locomotion, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 11(6), pp. 781-793, 1995.

[12] E. et F. Cosserat E, *Théorie des corps déformables* , Hermann, Paris, 1909.

[13] F. Boyer, D. Primault, Poincaré-Chetayev equations for flexible manipulators , à paraître dans le *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* (JAMM), 2005

[14] R. Coquereaux, *Espaces Fibrés et Connexions*, Cours de Physique Mathématique de Luminy, Marseilles, 2002.

[15] D.V. Alekseevskij, A.M. Vinogradov, V.V. Lychagin,, *Basic Ideas and concepts of differential geometry*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 28, R.V. Gamkrelidze (Ed.), Tome 1 : Geometry, Springer-Verlag, 1991.

[16] R. Montgomery, Gauge theory and the falling cat, in *Michael J. Enos, editor, Dynamics and control of mechanical systems: the falling cat and related problems. American Mathematical Society, Providence*, R.I., 1992.

[17] P. Morin, C. Samson, Practical stabilization of drift-less systems on Lie groups: the transverse function approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 9(48), pp. 1496-1508, 2003.

[18] S. Kelly, R. Murray, Geometric phases and robotic locomotion , *Journal of Robotic systems*, Vo.12(6), pp. 417-431, 1995.

[19] J.E. Marsden, T.S. Ratiu , *Introduction to mechanics and symmetry* , Springer, 1999.

[20] J.P. Ostrowski, Computing reduced equations for robotic systems with constraints and symmetries, *IEEE Transations on robotics and automation*, Vol. 15, no. 1, pp. 111-123, 1999.

[21] M. Renaud, *Calcul quasi minimal du modèle dynamique inverse d'un robot manipulateur* , Techniques de la robotique, Tome 1 : « Architectures et commande », Hermes, 1988.