Stabilisation de trajectoires pour des véhicules non-holonomes ou sous-actionnés

P. Morin C. Samson

INRIA

2004, Route des Lucioles
06902 Sophia-Antipolis Cedex, France
E-mail : Pascal.Morin@inria.fr, Claude.Samson@inria.fr

Résumé

Cet article est consacré à la commande par retour d'état des véhicules non-holonomes ou sous-actionnés, dans le cadre de la stabilisation de trajectoires. Cette classe de systèmes, qui inclut les robots mobiles à roues et de nombreux engins spatiaux, présente, du point de vue de la commande, des caractéristiques très différentes selon le type de trajectoire à stabiliser (e.g. configuration fixe, trajectoires non-stationnaires, etc). Ceci a conduit au développement de différentes approches de commande, destinées à résoudre des types d'applications particuliers. Le but de cet article est de fournir une présentation générale de ces méthodes, à partir des propriétés génériques des véhicules, et de proposer une approche unifiée pour le problème de stabilisation de trajectoires.

Mots Clef

Stabilisation, véhicule non-holonome, véhicule sous-actionné.

1 Introduction

La diversité des systèmes de locomotion en robotique est une source de développements importants pour l'automatique, dans la mesure où la commande de ces systèmes donne souvent lieu à des problèmes qu'on ne peut pas résoudre avec des techniques classiques. En outre, les applications dédiées aux véhicules et nécessitant un niveau d'autonomie élevé sont de plus en plus nombreuses. En effet, l'intrusion de ces systèmes en milieu non protégé (transport urbain automatisé, applications domestiques, applications militaires) nécessite une bonne robustesse et de fortes capacités de locomotion.

La place importante réservée aux véhicules non-holonomes et sous-actionnés dans les applications robotiques repose en partie sur l'existence de stratégies de commande simples et robustes pour stabiliser des trajectoires de référence. Les applications de type platooning par exemple, où il s'agit de contrôler la *position* d'un véhicule par rapport au véhicule précédant se déplaçant en marche avant, sont essentiellement basées sur des techniques d'automatique linéaire. Cependant, d'autres applications nécessitent d'utiliser des outils plus élaborés, notamment lorsque le contrôle de la situation complète (i.e. position et orientation) du véhicule est nécessaire. Les études consacrées à ce type d'applications sont nombreuses en automatique, ce qui ne facilite pas toujours leur lisibilité en terme d'intérêt applicatif. Un permier objectif de cet article est d'exposer les principaux problèmes étudiés dans la litérature consacrée à la stabilisation de trajectoires, et de donner un aperçu des approches existantes pour la synthèse de retours d'état. Un autre objectif est de présenter une approche de commande que nous avons récemment développée, et qui permet de traiter de façon unifiée des problèmes traditionellement abordés séparément.

La commande des véhicules non-holonomes et des véhicules sous-actionnés fait généralement l'objet d'études distinctes. Ceci est en partie justifié par la différence de structure des modèles associés. Pour les systèmes non-holonomes, la difficulté (du point de vue de l'automaticien) se situe au niveau du modèle cinématique, alors qu'elle est liée à la dynamique pour les systèmes sous-actionnés. Cette distinction implique également une hiérarchie en ce qui concerne la difficulté à synthétiser des lois de commande : alors que des méthodes assez générales ont été proposées pour la commande des systèmes non-holonomes (et plus généralement des systèmes de commande non-linéaires "sans dérive"), les systèmes sous-actionnés ont jusqu'à présent été étudiés au cas par cas, en raison de la difficulté à mettre en évidence des propriétés structurelles suffisamment générales et exploitables pour la synthèse. Malgré cela, ces deux classes de systèmes possèdent de nombreux points communs, rarement explicités, dont la compréhension peut permettre de progresser vers un traitement unifié des problèmes de commande. La démarche suivie dans cet article consiste à mettre en évidence ces similarités, et à montrer comment on peut en tirer profit pour résoudre les problèmes de stabilisation de trajectoires.

Le plan de cet article est le suivant. La Section 2 est principalement consacrée aux modèles des véhicules, et à leurs propriétés les plus significatives du point de vue de la commande. La Section 3 est dédiée aux problèmes de stabilisation de trajectoires impliquant un objectif de stabilité

asymptotique. En particuler, la stabilisation par retour de sortie, la stabilisation de trajectoires non-stationnaires, et la stabilisation de points fixes, sont abordés. Enfin, nous présentons dans la Section 4 l'approche de commande par fonctions transverses, basée sur un objectif de stabilisation pratique.

2 Notations et modèles

2.1 Notations

$\mathcal{C}^k(M;N)$ désigne l'ensemble des fonctions de M dans N k-fois différentiables et de dérivée k-ème continue. La différentielle d'une application $f \in \mathcal{C}^1(M;N)$ est notée df. Etant donné un vecteur $v \in \mathbb{R}^p$, le vecteur transposé est noté v'. Les notations suivantes concernent les groupes de Lie (voir e.g. [23], ou [28] pour un exposé plus complet). Soit G un groupe de Lie. L'élément neutre de G est noté e, i.e. $ge = eg = g$, et l'inverse de g est noté g^{-1}. La translation à gauche sur G est notée L, i.e. $L_\sigma(\tau) = \sigma\tau$. Un champ de vecteurs X sur G est *invariant à gauche* si $dL_\sigma(\tau)X(\tau) = X(\sigma\tau)$ pour tout $\sigma, \tau \in G$, avec dL_σ la différentielle de l'application L_σ. Par définition, l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Si $X \in \mathfrak{g}$, $\exp(tX)$ désigne la solution au temps t du système $\dot{g} = X(g)$ avec $g(0) = e$. Etant donné une base $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{g}$, et $v \in \mathbb{R}^n$, on notera $X(g)v := \sum_{i=1}^n X_i(g)v_i$ (en cohérence avec le fait que, dans un système de coordonnées, $\sum_{i=1}^n X_i(g)v_i$ est égale au produit de la matrice $X(g) = (X_1(g) \cdots X_n(g))$ par le vecteur v). La représentation adjointe est notée Ad, i.e. $\mathrm{Ad}(\sigma) = dI_\sigma(e)$ avec $I_\sigma \in \mathcal{C}^1(G;G)$ définie par $I_\sigma(g) = \sigma g \sigma^{-1}$. Etant donné une base $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{g}$, l'expression de Ad dans la base X sera notée Ad^X, i.e. $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Ad}(\sigma)X(e)v = X(e)\mathrm{Ad}^X(\sigma)v$. Rappelons enfin deux relations importantes. Soit X une base de $\mathfrak{g}$ et $(g_1, v_1), (g_1, v_2)$ deux solutions du système $\dot{g} = X(g)v$. Alors,

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(g_1 g_2^{-1}) &= X(g_1 g_2^{-1})\mathrm{Ad}^X(g_2)(v_1 - v_2) \\ \tfrac{d}{dt}(g_1^{-1} g_2) &= X(g_1^{-1} g_2)(v_2 - \mathrm{Ad}^X(g_2^{-1} g_1)v_1) \end{aligned} \tag{1}$$

2.2 Modèles de véhicules

Un modèle générique des véhicules est donné par les équations suivantes :

$$\dot{q} = X(q)C(s)v \tag{2a}$$

$$M(s)\dot{v} = -N(s,v)v + P(q,v,t) + B\tau \tag{2b}$$

L'équation (2a) correspondent au modèle cinématique du système.

- q est un élément de l'espace de configuration Q. Nous supposerons que Q admet une décomposition du type $Q = G \times S$, avec G un groupe de Lie associé à la situation du véhicule (i.e. position et orientation), et S un groupe de Lie abélien associé à des variables d'état internes du véhicule. On note $g \in G$ et $s \in S$ les composantes de q associées à cette décomposition, i.e. $q = (g, s)$. La dimension de Q est $n = n_g + n_s$ avec $n_g = \dim(G)$ et $n_s = \dim(S)$. Puisque G et S sont des groupes de Lie, il en est de même pour Q, avec le produit de deux éléments $q_1 = (g_1, s_1)$ et $q_2 = (g_2, s_2)$ défini par $q_1 q_2 = (g_1 g_2, s_1 + s_2)$.
- $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ est une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ de Q. Cette algèbre est égale au produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{s}$ des algèbres de Lie de G et de S, et l'on peut montrer que chaque champ X_i se décompose sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{s}$ de la façon suivante :

$$X_i(q) = \begin{pmatrix} X_i^g(g) \\ X_i^s(s) \end{pmatrix} \tag{3}$$

  avec $X_i^g \in \mathfrak{g}$ et $X_i^s \in \mathfrak{s}$.
- $C(s)$ est une matrice de transformation qui traduit l'influence des variables internes sur la vitesse du véhicule.
- $v \in \mathbb{R}^m$ est une variable de vitesse. Sa dimension, m, correspond au nombre de degrés de liberté (d.d.l.) du système.

L'équation (2b) décrit la dynamique du système, avec $\tau \in \mathbb{R}^p$ associé aux couples/forces délivrés par les actionneurs, et assimilable à un vecteur de commande. $M(s)$ est la matrice d'inertie, $N(s,v)$ est la matrice associée aux forces de Coriolis et centrifuges, $P(q,v,t)$ correspond à d'éventuelles forces extérieures et/ou frottements internes, et la matrice B relie les intensités des couples/forces produits par les actionneurs aux forces généralisées.

Sans grande perte de généralité, nous ferons les hypothèses suivantes (voir e.g. [5] ou [17, Chap.I] pour plus de détails).

Hypothèses :

1. Les matrices B et $C(s)$ sont de rang plein,
2. Le modèle cinématique, avec v assimilé à une variable de commande, satisfait la condition de rang de l'algèbre de Lie[1] en tout point, et donc est commandable.

A partir de la décomposition (3), et du fait que les matrices C, M, N, et B ne dépendent pas de g, on vérifie facilement la propriété suivante qui caractérise les véhicules :

Lorsque P ne dépend pas de g, si $(g(t), s(t), v(t))$ est une solution de (2) *associée à l'entrée $\tau(t)$ alors, pour tout élément $g_0 \in G$ $(g_0 g(t), s(t), v(t))$, est aussi solution de ce système pour la même entrée de commande.*

L'invariance des champs X_i conduit à définir des variables d'erreur entre la configuration q du véhicule et une configuration de référence q_r à partir de la loi de groupe sur Q. Par exemple, en définissant $\tilde{q} := q_r^{-1} q$ avec q_r une courbe régulière sur Q, on déduit de (1) le *modèle cinématique d'erreur*

$$\dot{\tilde{q}} = X(\tilde{q})\left(C(s)v - \mathrm{Ad}^X(\tilde{q}^{-1})w_r\right) \tag{4}$$

avec w_r définie par $\dot{q}_r = X(q_r)w_r$.

[1] Rappelons qu'un système sans dérive $\dot{x} = \sum_{i=1}^m v_i X_i(x)$ satisfait la condition de rang de l'algèbre de Lie en x_0 si l'espace vectoriel engendré par les champs X_i et les crochets de Lie itérés de ces champs entre eux évalués en x_0 est de dimension $\dim(x)$.

Finalement, notons que lorsque $S = \emptyset$, les équations (2) et (4) se réduisent à

$$\dot{g} = X(g)Cv \tag{5a}$$
$$M\dot{v} = -N(v)v - P(g, v, t) + B\tau \tag{5b}$$

et

$$\dot{\tilde{g}} = X(\tilde{g})\left(Cv - \mathrm{Ad}^X(\tilde{g}^{-1})w_r\right) \tag{6}$$

respectivement, avec X une base de $\mathfrak{g}$. Dans ce cas, le système (5a) est un "système sur un groupe" au sens où chaqu'un des champs de commande associé $X(g)Ce_1, \ldots, X(g)Ce_m$, avec $\{e_1, \ldots, e_m\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, est invariant à gauche sur G.

2.3 Classification simplifiée

On peut essentiellement distinguer trois classes de véhicules.

Les véhicules non-holonomes $(p = m < n)$**.** Ces systèmes sont caractérisés par l'existence de contraintes cinématiques non-intégrables, qui se traduisent par le fait que m, la dimension de v, est plus petit que $n = n_g + n_s$ (et même, dans la grande majorité des cas, plus petit que n_g). Les robots mobiles à roues constituent les principaux exemples de tels systèmes (voir [5] pour plus de détails sur les mécanismes existants et l'obtention des modèles). Puisque $p = m$ et B est de rang plein, B est carrée inversible et l'équation (2b) peut être linéarisée (par un changement de variable de commande statique) en $\dot{v} = \bar{u}$, avec $\bar{u}$ une nouvelle variable de commande reliée à τ de façon bijective (à q, v, t fixé). Pour cette raison notamment, il est usuel de se concentrer sur le modèle cinématique (qui contient les non-linéarités "dures"), sachant que si v^* est une commande différentiable pour ce modèle, il n'est pas difficile de calculer une commande $\bar{u}$ assurant la convergence de v vers v^* (et donc, conduisant asymptotiquement aux mêmes trajectoires). Nous suivrons ce parti pris dans la suite de cet article. Les systèmes de type unicycle (Fig 1) et voiture (Fig 2) constituent les exemples les plus répandus. Avec les notations de ces figures, des modèles cinématiques possibles ("posture kinematic models" au sens de [5]) sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v_1 \cos\theta \\ \dot{y} & = & v_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} & = & v_2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v_1 \cos\theta \\ \dot{y} & = & v_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} & = & v_1\zeta \\ \dot{\zeta} & = & v_2 \end{array}\right. \tag{7}$$

respectivement, avec $\zeta := \frac{\tan\varphi}{\ell}$, φ l'angle associée à la direction de la voiture, et ℓ la distance entre les points P_0 et P_1. Illustrons la modélisation de la Section 2.2 à partir de ces deux systèmes. Dans les deux cas, $G = SE(2)$ que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ avec la loi de groupe définie par

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} p_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + R(\theta_1)p_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

avec $p_i = (x_i, y_i)' \in \mathbb{R}^2$, $\theta_i \in \mathbb{S}$, et $R(\theta) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice de rotation d'angle θ. Le modèle cinématique de l'unicycle est donc de la forme (5a) avec

$$X(g) = \bar{R}(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

et $v = (v_1, v_2)'$. On peut assimiler les trois vecteurs colonnes de $X(g)$ à la valeur en g de trois champs de vecteurs X_1, X_2, X_3. On vérifie facilement que ces champs sont invariants à gauche par rapport à la loi de groupe définie par (8), et donc (puisque ces champs sont linéairement indépendants) qu'ils forment une base de $\mathfrak{g}$.
Pour la voiture, $s = \zeta \in \mathbb{R} = S$ est la variable interne, et l'on déduit de (7) que l'équation (2a) est vérifiée avec

$$X(q) = \begin{pmatrix} \bar{R}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

et $v = (v_1, v_2)'$.

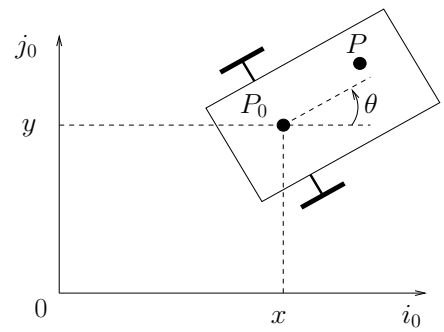

FIG. 1 – Véhicule de type unicycle

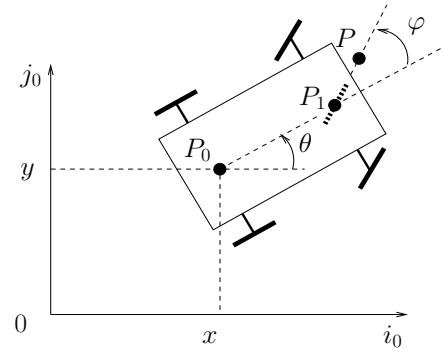

FIG. 2 – Véhicule de type voiture

Les véhicules sous-actionnés $(p < m = n)$**.** A l'opposé des systèmes non-holonomes, les principales non-linéarités de modèle des véhicules sous-actionnés se situent non pas

au niveau de la cinématique, mais au niveau de la dynamique, du fait que le nombre d'actionneurs indépendants est inférieur au nombre de d.d.l. du système. Pour cette raison, il est nécessaire dès le départ de considérer le modèle complet. Un exemple simple de système sous-actionné est le véhicule de type glisseur représenté sur la Figure 3. Il s'agit d'un corps rigide se déplaçant dans le plan, et actionné par le biais de deux propulseurs à l'arrière délivrant des forces f_1 et f_2. Le point P_0 correspond au centre de masse. Avec les notations de la figure, et en l'absence de forces extérieures, le modèle dynamique est donné par

$$\begin{cases} \dot{g} &= X(g)v \\ m\dot{v}_1 &= mv_2v_3 + \tau_1 \\ m\dot{v}_2 &= -mv_1v_3 \\ J\dot{v}_3 &= \tau_2 \end{cases} \tag{11}$$

avec $X(g)$ donnée par (9), m la masse du corps, J son inertie, et τ_1, τ_2 l'intensité de la force et du couple résultant des propulseurs. Le groupe G associé à ce système est encore

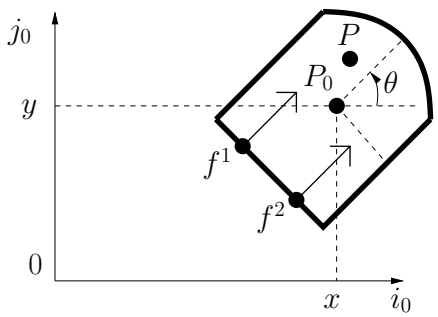

FIG. 3 – Véhicule de type glisseur

$SE(2)$, et la relation (5a) est satisfaite avec $X(g)$ donné par (9) et $C = I_3$ la matrice identité de $\mathbb{R}^3$. Enfin, la relation (5b) est satisfaite avec $M = \text{Diag}(m, m, J)$, $N(v)v = (-mv_2v_3, mv_1v_3, 0)'$, $P = 0$, et $B\tau = (\tau_1, 0, \tau_2)'$.

Les véhicules non-holonomes sous-actionnés ($p < m < n$)**.** Cette famille de système cumule les non-linéarités des deux classes précédentes. Les exemples physiques (commandables) de tels systèmes étant peu nombreux, et encore assez marginaux, nous ne traiterons pas ces systèmes dans cet article (voir e.g. [15] pour un exemple).

2.4 Propriétés de commandabilité

Commandabilité en un point. Pour les systèmes non-holonomes, le linéarisé en un point d'équilibre n'est jamais commandable, mais la condition de rang de l'algèbre de Lie en un point (cf. Hypothèse 2) est une condition suffisante de commandabilité locale du modèle cinématique (et aussi une condition nécessaire lorsque les champs associés sont analytiques). Dès que cette propriété est vérifiée, la commandabilité du modèle dynamique (au sens STLC [26]) est également garantie (voir e.g. [6]).

Le cas des systèmes sous-actionnés est plus délicat. Supposons d'abord que $P = 0$. Dans ce cas, comme pour les systèmes non-holonomes, le linéarisé autour d'un point d'équilibre ne peut être commandable (car $p < m$), mais contrairement au cas précédent, la condition de rang de l'algèbre de Lie n'est plus une condition suffisante de commandabilité. Toutefois, le théorème de Sussmann [26, Th. 7.2], qui fournit une condition suffisante de commandabilité (au sens STLC) pour des systèmes de commande généraux, permet très souvent de vérifier cette propriété de commandabilité. Par exemple, on montre facilement à partir de ce résultat que le système (11) est commandable au sens STLC en tout point fixe (i.e. en tout $(g, v) = (g_0, 0)$ avec g_0 arbitraire. Précisons que la commandabilité d'un système du type (2) pour une situation g_0 implique la commandabilité pour toute autre situation. Notons par ailleurs que dans [14] (voir également [4]), des critères sont proposés pour tester d'autres types de commandabilité. Avant de terminer cette section il est important de noter que, contrairement au cas des systèmes non-holonomes, le terme de perturbation P peut influencer les propriétés de commandabilité du système. Considérons l'exemple du glisseur, et supposons qu'une force constante $c\vec{\imath}_0$ est appliquée au système. Dans ce cas, on peut vérifier que le linéarisé autour de toute configuration $g_0 = (x_0, y_0, 0)$ est commandable (alors qu'il ne l'est jamais lorsque $P = 0$). Notons que pour une telle perturbation, ces configurations correspondent à l'ensemble des points d'équilibre du système. De nombreux systèmes volants [13, 27] satisfont des propriétés analogues, avec le terme de perturbation induit par la gravité.

Commandabilité le long de trajectoires. Bien que le linéarisé en un point fixe des systèmes non-holonomes ou sous-actionnés (avec $P = 0$) ne soit pas commandable, le linéarisé le long de trajectoires non-stationnaires peut être commandable. En fait, il est montré dans [25] que pour tout système de commande analytique $\dot{x} = X_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x)$, commandable au sens STLC, le linéarisé le long de trajectoires est *génériquement commandable*. Ceci signifie essentiellement[2] que la commandabilité du linéarisé est garantie pour "presque toutes" les trajectoires de référence. Illustrons cette propriété sur les exemples de la voiture et du glisseur.

Considérons une trajectoire de référence admissible (i.e. réalisable) (q_r, v_r) pour le système (2). On considère comme variable d'erreur associée ($\tilde{q} = q_r^{-1}q, \tilde{v} = v - v_r$). Sur $SE(2)$, $\text{Ad}^X(g)$ est donné par

$$\text{Ad}^X(g) = \begin{pmatrix} R(\theta) & \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lorsque X est définie par (9), et sur tout groupe abélien S, $\text{Ad}(s)$ est l'application identité. On en déduit que le linéarisé du modèle cinématique d'erreur (4) (en $\tilde{q} = e$) est

[2] Plus précisément, l'ensemble des entrées de référence $u_r(t)$ $t \in [0, T]$ pour lesquelles le linéarisé est commandable sur un sous intervalle $[0, T_0]$ de $[0, T]$ le long de la trajectoire x_r associée est générique dans $\mathcal{C}^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ pour tout $T > 0$.

donné, lorsque $G = SE(2)$, par

$$\dot{\tilde{q}} = A(s_r, v_r)\tilde{g} + \sum_{i=1}^{m} v_{r,i} \frac{\partial C^i}{\partial s}(s_r)\tilde{s} + C(s_r)\tilde{v} \qquad (12)$$

avec

$$A(s_r, v_r) = \begin{pmatrix} 0 & C_3(s_r)v_r & -C_2(s_r)v_r \\ -C_3(s_r)v_r & 0 & C_1(s_r)v_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et C_i (resp. C^i) le i-ème vecteur ligne (resp. colonne) de C. Dans le cas de la voiture, C est définie par (10), et l'équation (12) devient

$$\dot{\tilde{q}} = v_{r,1} \begin{pmatrix} 0 & \zeta_r & 0 & 0 \\ -\zeta_r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{q} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \zeta_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{v} \qquad (13)$$

Par application du critère de commandabilité pour les systèmes linéaires non-stationnaires (voir e.g. [8, Sec. 5.3]), on montre que ce système est commandable sur $[0, T]$ dès que $v_{r,1}$ est une fonction régulière sur cet intervalle et non-identiquement nulle.
Dans le cas du glisseur, $S = \emptyset$ et C est la matrice identité, de sorte que l'équation (12) est donnée par

$$\dot{\tilde{g}} = \begin{pmatrix} 0 & v_{r,3} & -v_{r,2} \\ -v_{r,3} & 0 & v_{r,1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{g} + \tilde{v} \qquad (14)$$

Concernant la dynamique, on déduit de (11) l'équation linéarisée suivante :

$$\dot{\tilde{v}} = \begin{pmatrix} 0 & v_{r,3} & v_{r,2} \\ -v_{r,3} & 0 & -v_{r,1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{v} + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{pmatrix} \tilde{\tau} \qquad (15)$$

avec $\tilde{\tau} = \tau - \tau_r$ et τ_r l'entrée associée à la trajectoire de référence. En utilisant à nouveau le critère de commandabilité des systèmes linéaires non-stationnaires, on peut montrer que le système (14)–(15) est commandable sur $[0, T]$ dès que l'entrée τ_r est une fonction régulière sur cet intervalle et non-identiquement nulle. Lorsque τ_r est indentiquement nulle sur $[0, T]$, la commandabilité sur cet intervalle est encore vérifiée si $v_{r,3}$ n'est pas identiquement nulle. Dans le cas contraire, (i.e. si le mouvement du glisseur consiste en une translation pure à vitesse constante) le linéarisé n'est plus commandable.

3 Méthodes de synthèse pour la stabilisation asymptotique

De nombreux objectifs de commande peuvent être formulés comme la stabilisation asymptotique à zéro d'un vecteur de sortie $\eta \in \mathbb{R}^k$, avec $k \leq n$. Pour les véhicules, η est typiquement une composante d'un vecteur

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \nu \end{pmatrix} = h(\tilde{q}, q_r) = \begin{pmatrix} h_\eta(\tilde{q}, q_r) \\ h_\nu(\tilde{q}, q_r) \end{pmatrix} \qquad (16)$$

avec $h(., q_r)$ un difféomorphisme pour tout q_r. Afin de réaliser cette stabilisation, une première étape consiste à établir la relation dynamique qui relie η à l'entrée de commande u (i.e. $u = v$ ou $u = \tau$ suivant le modèle utilisé). Considérons par exemple le cas des véhicules non-holonomes. Dans ce cas, on obtient une equation différentielle du premier ordre du type

$$\dot{\eta} = f(\eta, \nu, q_r, v_r, v) \qquad (17)$$

On peut alors distinguer deux cas :

1. le linéarisé du système (17) en $\eta = 0$ est commandable (uniformément par rapport à (ν, q_r, v_r)). Dans ce cas, il est possible, localement, de stabiliser $\eta = 0$ par des retours d'état linéaires du type $v = K(t)\eta$. Dans le but d'augmenter la taille du domaine de stabilité (et aussi éventuellement de relâcher les hypothèses de commandabilité uniforme du système), des retours d'état non-linéaires peuvent être utilisés.
2. le linéarisé du système (17) en $\eta = 0$ n'est pas commandable. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser des retours d'état non-linéaires même localement. La synthèse de telles commandes et l'analyse du système contrôlé (en termes de robustesse notamment) peut s'avérer très délicate.

Le cas des systèmes sous-actionnés est similaire, avec (17) remplacée par une équation du deuxième ordre reliant $\ddot{\eta}$ à τ.

3.1 Stabilisation partielle par retour de sortie

Pour les véhicules, la stabilisation par retour de sortie est le plus souvent utilisée pour un contrôle en position seulement. Plus généralement, il s'agit de stabiliser à zéro un vecteur $\eta \in \mathbb{R}^k$ défini par (16), avec h_η une fonction choisie de sorte que le système dynamique (17) soit linéarisable par un changement de variable de commande.
Considérons d'abord le cas des systèmes non-holonomes. Dans ce cas, le long des solutions du système (2),

$$\dot{\eta} = \frac{\partial h_\eta}{\partial \tilde{q}} X(\tilde{q})C(s)v - \frac{\partial h_\eta}{\partial \tilde{q}} \mathrm{Ad}^X(\tilde{q}^{-1})w_r + \frac{\partial h_\eta}{\partial q_r}\dot{q}_r \quad (18)$$

Si la matrice $k \times m$ $\frac{\partial h_\eta}{\partial \tilde{q}} X(\tilde{q})C(s)$ est de rang k, ce qui est possible lorsque $k \leq m$, alors l'application

$$v \longmapsto \dot{\eta} \qquad (19)$$

est surjective et l'équation (18) peut être linéarisée par un changement de variable de commande. Une fois cette linéarisation effectuée, un simple retour d'état linéaire permet d'obtenir la stabilité exponentielle de $\eta = 0$. Ce type d'approche est très utilisé dans les problèmes de platooning consistant à suivre un véhicule se déplaçant en marche avant. Dans ce cas, on cherche à contrôler la *position* du véhicule par rapport au véhicule précédent (l'orientation

n'ayant pas besoin d'être contrôlée activement), et on définit par exemple $h_\eta(\tilde{q}, q_r) = h^1_\eta(\tilde{q}, q_r) = (x_P - x_r, y_P - y_r)'$ avec (x_P, y_P) (resp. (x_r, y_r)) les coordonnées d'un point P lié au véhicule commandé (resp. d'un point P_r lié au véhicule de référence). Lorsqu'on ne dispose que de mesures de positionnement relatives, on pourra utiliser la fonction $h_\eta(\tilde{q}, q_r) = h^2_\eta(\tilde{q}, q_r) = R(-\theta_r)h^1_\eta(\tilde{q}, q_r)$. Pour garantir que l'application (19) est surjective, il convient de choisir le point P convenablement. Pour un véhicule de type unicycle, il suffit que P ne soit pas situé sur l'axe des roues arrières (cf. Fig. 1). Pour un véhicule de type voiture, on choisira un point lié à la roue virtuelle de direction et déporté par rapport au centre de cette roue (cf. Fig. 2).
Le cas des systèmes sous-actionnés peut être traité de façon similaire, à partir du modèle dynamique. Dans ce cas, on cherche à choisir h_η de sorte que l'application

$$\tau \longmapsto \ddot{\eta} \tag{20}$$

soit surjective (ce qui est possible lorsque $k \leq p$). Dès lors, on peut linéariser l'équation de $\ddot{\eta}$ et un retour d'état linéaire $K_1\eta + K_2\dot{\eta}$ convenablement choisi garantit la stabilisation exponentielle de $(\eta, \dot{\eta}) = 0$. Par exemple, pour le contrôle en position du glisseur, on pourra utiliser les fonctions h_1 ou h_2 spécifiées ci-dessus. Dans ce cas, comme pour l'unicycle, on peut montrer que l'application (20) est surjective lorsque le point P est déporté par rapport au centre de masse P_0 (cf. Fig 3).
La limitation des approches par retour de sortie provient du fait que la "variable complémentaire" ν dans (16) n'est pas activement contrôlée. Pour certaines applications (comme le platooning) ceci ne met pas en danger le comportement global du système. Cependant, l'effet de "cisaillement" ("jack-knife effect" en anglais), pouvant par exemple survenir lors de l'exécution de manœuvres par un véhicule de type voiture, montre bien comment ce type d'approche peut être mis en défaut. Il peut alors s'avérer nécessaire de contrôler l'état complet du véhicule.

3.2 Stabilisation de trajectoires non-stationnaires

Lorsqu'il est nécessaire de stabiliser la position *et* l'orientation (i.e. la situation complète g) d'un véhicule non-holonôme ou sous-actionné par rapport à une trajectoire de référence, il n'est en général plus possible de linéariser le système dynamique (17) par un changement de variable de commande statique car k,la dimension de η, est supérieur à p. L'utilisation d'extensions dynamiques permet dans certains cas de ce ramener à un système (de dimension plus grande) linéarisable. L'approche de commande par platitude [12], qui repose sur cette propriété, est applicable à de nombreux véhicules. Une difficulté de mise en œuvre réside dans l'existence de singularités de ces retours d'état lorsque la trajectoire de référence possède des points d'arrêts. Une solution partielle à ce problème est proposée dans [11].
Une autre approche, basée sur les propriétés génériques de commandabilité le long de trajectoires (cf. Section 2.4), consiste à utiliser des retours d'état statiques linéaires. Dans le cas d'un véhicule de type unicycle, cette méthode a été utilisée dans [24, 7]. A titre d'exemple, pour les véhicules de type voiture, on peut montrer le résultat suivant (voir [17, Sec. 2.3.2]) :

Proposition 1 *Soit une trajectoire de référence q_r pour la voiture, avec $s_r(= \zeta_r)$ supposée bornée. Soit $K(t)$ la matrice*

$$\begin{pmatrix} -k_1|v_{r,1}| & 0 & -\frac{k_1}{2k_2}\zeta_r|v_{r,1} & 0 \\ 2k_2 v_{r,1}\zeta_r & -2k_2k_4|v_{r,1}| & -v_{r,1}(2k_2 + \frac{k_3}{2}) & -k_4|v_{r,1} \end{pmatrix}$$

avec $k_1, \ldots, k_4 > 0$. Alors,
- *Si v_r et $\dot{v}_r$ sont bornées, le retour d'état linéaire $\tilde{v} = K(t)\tilde{q}$ rend l'origine du système d'erreur linéarisé* (13) *stable, et globalement asymptotiquement stable si $v_{r,1}(t)$ ne tend pas vers zéro lorsque t tend vers l'infini.*
- *Si $v_r(t)$ est de signe constant et $\int_0^t |v_{r,1}|(s)\,ds \to \infty$ lorsque $t \to \infty$, $\tilde{v} = K(t)\tilde{q}$ rend l'origine du système d'erreur non-linéaire* (4) *localement asymptotiquement stable.*

Notons que la convergence vers zéro de la variable d'erreur n'est généralement pas garantie si $v_{r,1}(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, et en particulier qu'elle n'est pas obtenue lorsque l'état de référence $q_r(t)$ converge vers une valeur fixe. Ceci est dû au fait que le linéarisé du système d'erreur, en une configuration fixe, n'est pas commandable. Un inconvénient des lois de commande linéaires comme celles de la Proposition 1 réside dans le fait que le bassin d'attraction de l'origine pour le système contrôlé est généralement local, et difficile à spécifier. La synthèse de retours d'état non-linéaires, typiquement par des techniques de type Lyapunov, peut permettre d'obtenir des stabilisateurs plus globaux. Par exemple, une "version non-linéaire" du retour d'état de la Proposition 1 est donné dans [19]. Concernant les véhicules non-holonomes, de nombreux résultats sur ce problème (qu'il n'est pas possible ici de détailler) existent dans la littérature. Nous renvoyons notamment le lecteur à [7] pour plus de références. Le cas des systèmes sous-actionnés, plus difficile, a été moins étudié (voir néanmoins [10, 13]).

3.3 Stabilisation de points fixes

Contrairement aux deux problèmes précédents, les techniques issues de l'automatique linéaire ne peuvent généralement pas être utilisées pour la stabilisation de points fixes car le système linéarisé associé n'est pas commandable. Il faut cependant rappeler (voir Section 2.4) que certains véhicules sous-actionnés échappent à cette règle en raison du terme de perturbation P dans (2) qui rend le système linéarisé en une configuration fixe commandable. Dans ce cas, les techniques linéaires classiques restent utilisables. Lorsque $P = 0$, ce que nous supposerons dans la suite de cette section, des techniques nonlinéaires doivent être

utilisées. Une difficulté supplémentaire réside dans le fait que la stabilisation asymptotique de points fixes ne peut être réalisée par des retours d'état autonomes réguliers (i.e. du type $u(x)$). Ceci découle du théorème de Brockett [3]. De nombreux travaux ont été menés dans les années 90 afin de contourner cette difficulté via la synthèse d'autres types de commandes (e.g. instationnaires, hybrides continue/discret, etc). Sous des hypothèses de commandabilité relativement faibles, on peut garantir l'existence de retours d'état asymptotiquement stabilisants, pour les systèmes non-holonomes comme pour les systèmes sous-actionnés [9], et de nombreuses méthodes de synthèse ont aussi été développées. Toutefois, aucune solution de commande ne semble échapper au dilemme suivant :

– Les retours d'état réguliers (différentiables par exemple) permettent éventuellement d'obtenir des propriétés de robustesse et de sensibilité aux bruits de mesure satisfaisantes, mais ne permettent pas d'obtenir une convergence exponentielle vers l'équilibre.
– Stabilité et convergence exponentielle peuvent être obtenus avec des retours d'état seulement continus, mais au prix d'une perte de robustesse vis-à-vis de certaines erreurs de modèles, et d'une très forte sensibilité aux bruits de mesure.

Il n'est pas possible ici de détailler tous ces aspects et nous renvoyons le lecteur à [17, 21] pour plus de détails sur les méthodes de synthèse existantes et leurs limitations.

4 Stabilisation pratique et fonctions transverses

L'objectif de cette section est de présenter une nouvelle approche de commande que nous avons commencé à développer depuis quelques années. Cette approche, basée sur un objectif de stabilisation pratique (i.e. stabilisation d'un petit voisinage d'un point plutôt que du point lui-même), permet d'apporter une solution unifiée à de nombreux problèmes de stabilisation de trajectoires.

4.1 Motivations pour la stabilisation pratique

Pour les véhicules non-holonomes ou sous-actionnés, plusieurs difficultés suggèrent que l'objectif de stabilisation asymptotique n'est pas toujours bien posé, et ne correspond pas nécessairement aux possibilités du système.

1. Pour la stabilisation asymptotique de point fixe, nous avons brièvement rappelé en Section 3.3 le dilemme performance/robustesse qui empêche d'obtenir une convergence rapide de façon robuste. Ceci se traduit en pratique par la difficulté à obtenir un positionnement très précis par rapport à une situation fixe.
2. Les résultats de stabilisation asymptotique de trajectoires reposent sur une connaissance a priori de la trajectoire à stabiliser, et ne garantissent une convergence de l'erreur que pour certaines trajectoires de référence (cf e.g. Prop 1). Si celles-ci ne sont pas connues à l'avance (e.g. si elle sont issues d'une mesure en temps réel), la question du choix de commande à utiliser reste posée. On peut alors se demander s'il existe des lois de commande (éventuellement instationnaires) paramétrisées par la trajectoire de réference, i.e. $u(q, v, q_r, v_r, \tau_r, t)$ qui permettent de stabiliser asymptotiquement toute trajectoire de référence. Il a récemment été montré dans [16] que pour de nombreux véhicules (unicycle, voiture, etc), de telles commandes n'existent pas.
3. Pour certains problèmes de commande, il peut être utile de pouvoir "suivre", avec une précision donnée, des trajectoires non-réalisables. Un premier exemple concerne des applications de "platooning" avec un véhicule de tête susceptible de faire des manœuvres (voir [1]). Un autre exemple concerne le cas ou des perturbations agissant sur le système ne permettent pas de calculer à l'avance des trajectoires réalisables (ce qui est courant pour les systèmes sous-actionnés). Enfin, lorsque la trajectoire de référence doit faire l'objet d'une planification, celle-ci peut être drastiquement simplifiée lorsque l'on dispose de lois de commande permettant de suivre, avec une précision donnée, des trajectoires non-réalisables. La stabilisation asymptotique de trajectoires non-réalisables étant impossible, il est nécessaire de considérer un objectif de commande moins contraignant.

L'approche de commande par fonctions transverses [18, 20], basée sur un objectif de stabilisation pratique, permet d'apporter des solutions à ces problèmes.

4.2 Fonctions transverses : définition et existence

Définition 1 *Soient $X_1, \ldots, X_m$ des champs de vecteurs sur une variété différentielle M. Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^p; M)$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, est une* fonction transverse *aux champs $X_1, \ldots, X_m$ si*

$$\forall \alpha \in \mathbb{T}^p\,, \quad \operatorname{rang} H(\alpha) = \dim(M) \tag{21}$$

avec

$$H(\alpha) = \left(X_1(f(\alpha)) \cdots X_m(f(\alpha)) \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}(\alpha) \cdots \frac{\partial f}{\partial \alpha_p}(\alpha) \right)$$

Dans [18], nous avons montré que si les champs $X_1, \ldots, X_m$ satisfont la condition de rang de l'algèbre de Lie en un point x_0 alors, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 il existe une fonction transverse à ces champs, à valeur dans $\mathcal{U}$. Le principe de l'approche de commande par fonctions transverses consiste à utiliser $\dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_p$ comme des variables de commande (virtuelles) supplémentaires, pour contrôler des déplacements sur M dans des directions complémentaires à celles données par les X_i. Lorsque les champs X_i sont invariants à gauche sur un groupe de Lie G, cette approche est systématique comme nous allons le montrer maintenant.

4.3 Application à la stabilisation des véhicules non-holonomes

Le résultat suivant a été donné dans [20, Prop. 1] (avec des notations légèrement différentes).

Proposition 2 *Soit G un groupe de Lie de dimension n et $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$. Considérons le système*

$$\dot{g} = X(g)\left(Cv + P(g,t)\right) \tag{22}$$

avec $v \in \mathbb{R}^m$, C une matrice $n \times m$ de rang plein, et P une application continue. Alors,
i) si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^p; G)$, la dérivée de $z := gf^{-1}(\alpha)$ avec g solution de (22) *et $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{T}^p)$ est donnée par*

$$\dot{z} = X(z)\mathrm{Ad}^X(f(\alpha))\left(\bar{C}(\alpha)\bar{v} + P(g,t)\right) \tag{23}$$

avec $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_m, \dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_p)'$, $\bar{C}(\alpha) = (C| - A(\alpha))$ et $A(\alpha)$ la matrice $n \times p$ définie par $\dot{f} = X(f(\alpha))A(\alpha)\dot{\alpha}$;
ii) si f est une fonction transverse aux champs $X(g)Ce_1, \ldots, X(g)Ce_1$ (avec $\{e_1, \ldots, e_m\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$), la matrice $\bar{C}(\alpha)$ est de rang n pour tout α, et par conséquent le retour d'état dynamique

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger\left(\mathrm{Ad}^X(f(\alpha)^{-1})v_z - P(g,t)\right)$$

avec $\bar{C}(\alpha)^\dagger$ une inverse à droite de $\bar{C}(\alpha)$ transforme le système (23) *en $\dot{z} = X(z)v_z$.*

Indiquons comment se résultat fournit une solution au problème de stabilisation pratique d'une trajectoire de référence quelconque (i.e. réalisable ou non) pour de nombreux véhicules non-holonomes. Considérons tout d'abord le cas où le modèle cinématique ne contient pas de variable interne (ce qui correspond par exemple au modèle de l'unicycle donné par (7)). Si g_r est une trajectoire de référence sur G, le modèle d'erreur (6) est de la forme (22) avec $P(g,t) = -\mathrm{Ad}^X(\tilde{g}^{-1})w_r$. Puisque le modèle cinématique satisfait la condition de rang de l'algèbre de Lie (par hypothèse) en tout point, il existe (voir Section 4.2), pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de e, une fonction transverse aux champs $X(g)Ce_1, \ldots, X(g)Ce_m$, à valeur dans $\mathcal{U}$. A partir d'une telle fonction, la Proposition 2 permet de calculer des commandes dynamiques $\bar{v}$ qui assurent la convergence exponentielle de $z = \tilde{g}f(\alpha)^{-1}$ vers e, et donc la convergence de l'erreur de suivi $\tilde{g}$ vers $f(\alpha) \in \mathcal{U}$. Il suffit pour cela, dans un système de coordonnées, de choisir $v_z = (X(z))^{-1}Kz$ avec K une matrice Hurwitz-stable. Ainsi, *indépendamment* de la trajectoire de référence, on obtient la convergence de l'erreur de suivi vers un voisinage de l'origine qui peut être rendu arbitrairement petit via le choix de la fonction transverse. A ce stade, il reste à spécifier de telles fonctions. Dans [20], une expression générale est proposée. Pour des systèmes sur des groupes de Lie, ces fonctions sont définies sur $\mathbb{T}^{n-m}$ (ce qui correspond à la plus petite valeur possible), et la matrice $\bar{C}(\alpha)$ est alors carrée et inversible. Par exemple, pour l'unicycle, une famille de fonctions transverses est donnée par

$$f_\varepsilon(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sin\alpha \\ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4}\sin 2\alpha \\ \varepsilon_2\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 \in (0, \pi/2) \tag{24}$$

Les deux paramètres $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ permettent de modifier la "taille" de la fonction transverse, et donc la précision du suivi. Il faut noter que de petites valeurs de ces paramètres peuvent conduire, en particulier lorsque la trajectoire g_r n'est pas réalisable, à un nombre important de manœuvres. Ceci est rarement souhaitable en pratique. Des fonctions transverses un peu plus complexes, permettant de mieux gérer ce compromis précision/manœuvres, sont proposées dans [2] (voir aussi [1] pour des détails complémentaires, et une validation expérimentale de ces lois de commande).

Indiquons maintenant comment cette approche peut s'appliquer à d'autres modèles de véhicules contenant des variables internes. Considérons par exemple le cas de la voiture (notons que tous les systèmes de type unicycle ou voiture avec remorques à attaches centrées peuvent être traités de façon analogue). Deux méthodes sont possibles.

Premièrement, il est bien connu que le modèle cinématique (7) de la voiture peut être transformé, par un changement de variables d'état et de commande, en un système chaîné de dimension quatre. Une telle transformation est également possible, lorsque $s_r = \zeta_r = 0$, pour le modèle d'erreur de suivi (4), modulo un terme de perturbation P_0, i.e.

$$\dot{y} = Y_1(y)v_1 + Y_2(y)v_2 + P_0(y,t) \tag{25}$$

avec $Y_1(y) = (1, 0, y_2, y_3)'$ et $Y_2(y) = (0, 1, 0, 0)'$. Dès lors, il suffit de remarquer que les champs Y_1 et Y_2 sont invariants à gauche sur $\mathbb{R}^4$ par rapport à une loi de groupe (voir [20] pour plus de détails). On est donc dans le cadre d'application de la Proposition 2, avec (25) correspondant au système (22).

Une deuxième méthode consiste à travailler directement avec le modèle d'erreur (4). Il n'est en effet pas très difficile d'étendre la Proposition 2 à certains systèmes du type (2a) (voir [21] pour plus de détails).

4.4 Application à la stabilisation des véhicules sous-actionnés

L'approche de commande par fonctions transverses a initialement été développée pour la commande des systèmes non-linéaires sans dérive, et donc en particulier pour les modèles cinématiques des véhicules non-holonomes. Récemment, dans [22], nous avons montré qu'il est aussi possible d'utiliser cette approche pour la commande des systèmes sous-actionnés. Nous présentons ici le principe de cette extension. Précisons toutefois que ce travail est encore préliminaire, et en cours de développement. Considé-

rons la classe de systèmes

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{g} & = & X(g)v \\ \dot{v}_1 & = & u_1 \\ \dot{v}_2 & = & u_2 \\ \dot{v}_3 & = & av_1v_2 \end{array}\right. \tag{26}$$

avec u_1, u_2 des variables de commande, et a une constante qui doit être non nulle pour garantir la commandabilité au sens STLC du système. Ce système est évidemment un cas particulier du système (5). De nombreux modèles de systèmes sous-actionnés peuvent se mettre sous cette forme. C'est clairement le cas du modèle (11) du glisseur (par permutation des vitesses v_2 et v_3 et changement de variable de commande). C'est aussi le cas de nombreux autres systèmes (manipulateurs plans sous-actionnés, satellites sous-actionnés, etc). Le principe des fonctions transverses est de générer des variables de commandes supplémentaires agissant dans des directions non-directement commandées. Pour les véhicules non-holonomes, ces directions se situent au niveau de la cinématique. Pour les véhicules sous-actionnés, elles se situent au niveau de la dynamique. En particulier, pour le système (26), il s'agit essentiellement de générer une variable de commande supplémentaire pour contrôler v_3, afin de pouvoir suivre, dans un sens de stabilisation pratique, une trajectoire de référence g_r *arbitraire*. D'après (6), le modèle d'erreur cinématique associé à g_r est donné par

$$\dot{\tilde{g}} = X(\tilde{g})(v - \mathrm{Ad}^X(\tilde{g}^{-1})v_r) \tag{27}$$

avec v_r définie par $\dot{g}_r = X(g_r)v_r$. Introduisons les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_1(t) & = & p_1(0) + \int_0^t \vartheta_1(s)\,ds \\ h_1(t) & = & h_1(0)\exp\left((p_1(t) - p_1(0))X_1\right) \end{array}\right. \tag{28}$$

Ces relations impliquent que si $h_1(0)$ est proche de e et $|\int_0^t \vartheta_1(s)ds|$ reste petit pour tout t, alors $h_1(t)$ reste proche de e pour tout t. Soit $\bar{g} := \tilde{g}h_1^{-1}$. Pour que $\tilde{g}$ soit proche de e, il suffit que h_1 et $\bar{g}$ soient proches de e. Nous montrons ci-dessous comment synthétiser un retour d'état qui assure cette propriété.
On déduit de (1), (27), et (28), que

$$\dot{\bar{g}} = X(\bar{g})\mathrm{Ad}^X(h_1)\left(\bar{v} - \mathrm{Ad}^X(\tilde{g}^{-1})v_r\right) \tag{29}$$

avec $\bar{v} = (v_1 - \vartheta_1, v_2, v_3)'$. Puisque $\bar{v}_2 = v_2$ et $\bar{v}_3 = v_3$, on déduit de (26), (27), et (28), que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{p}_1 & = & \vartheta_1 \\ \dot{\bar{v}}_2 & = & u_2 \\ \dot{\bar{v}}_3 & = & av_1\bar{v}_2 = a\vartheta_1\bar{v}_2 + a\bar{v}_1\bar{v}_2 \end{array}\right. \tag{30}$$

Avec $y = (p_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)'$, $Y_1(y) = (1, 0, ay_2)'$, et $Y_2(y) = (0, 1, 0)'$, les équations précédentes s'écrivent

$$\dot{y} = Y_1(y)\vartheta_1 + Y_2(y)u_2 + (0, 0, a\bar{v}_1\bar{v}_2)' \tag{31}$$

Notons que Y_1 et Y_2 correspondent aux champs de vecteurs du système chaîné de dimension 3 (au paramètre a près qui peut être différent de l'unité). Le système (31) est un cas particulier de (22) avec $g = y$, $X = Y = \{Y_1, Y_2, Y_3 := [Y_2, Y_1]\}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v = (\vartheta_1, u_2)'$, et $P(g,t) = (0, 0, \bar{v}_1(t)\bar{v}_2)' = (0, 0, \bar{v}_1(t)y_2)'$. La loi de groupe associée (par rapport à laquelle les champs Y_i sont invariants à gauche), que nous noterons $\circ$ pour la différencier de la loi de groupe sur G, est définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad x \circ y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 + ay_1x_2 \end{pmatrix}$$

Comme le système $\dot{y} = Y_1(y)\vartheta_1 + Y_2(y)u_2$ satisfait la condition de rang de l'algèbre de Lie en tout point, il existe des fonctions transverses pour ce système. De telles fonctions sont par exemple données par (comparer avec (24))

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sin\alpha \\ \varepsilon_2 \cos\alpha \\ \frac{a\varepsilon_1\varepsilon_2}{4}\sin 2\alpha \end{pmatrix} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0) \tag{32}$$

La variable $z = y \circ f(\alpha)^{-1}$ de la Proposition 2 est donnée par

$$z = \begin{pmatrix} y_1 - f_1(\alpha) \\ y_2 - f_2(\alpha) \\ y_3 - f_3(\alpha) - af_1(\alpha)(y_2 - f_2(\alpha)) \end{pmatrix} \tag{33}$$

et l'équation (23) peut être développée comme suit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{z}_1 & = & \vartheta_1 - c_1(\alpha)\dot{\alpha} \\ \dot{z}_2 & = & u_2 - c_2(\alpha)\dot{\alpha} \\ \dot{z}_3 & = & -ac_3\dot{\alpha} + a\bar{v}_1v_2 - af_1(\alpha)(u_2 - c_2(\alpha)\dot{\alpha}) \\ & & +ay_2(\vartheta_1 - c_1(\alpha)\dot{\alpha}) \end{array}\right. \tag{34}$$

avec $c_1(\alpha) = \varepsilon_1\cos\alpha$, $c_2(\alpha) = -\varepsilon_2\sin\alpha$ et $c_3 = -(\varepsilon_1\varepsilon_2)/2$. Conformément à la Proposition 2, on vérifie facilement que ce système peut être linéarisé par un changement de variable de commande $(\vartheta_1, u_2, \dot{\alpha})$. Posons $\vartheta_1 = c_1(\alpha)\dot{\alpha} - k_1z_1$ avec $k_1 > 0$, afin de stabiliser z_1 à zéro. Puisque $z_1 = y_1 - f_1(\alpha) = p_1 - f_1(\alpha)$, si l'on pose de plus $p_1(0) = f_1(\alpha(0))$, on a

$$\forall t, \quad \left\{\begin{array}{l} p_1(t) = f_1(\alpha(t)) \\ \vartheta_1(t) = c_1(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) \end{array}\right. \tag{35}$$

Dès lors, il s'agit d'utiliser les trois entrées de commande u_1, u_2, et $\dot{\alpha}$ afin de contrôler $\bar{v}$. Pour ce faire introduisons la variable

$$\begin{array}{l} \bar{\xi} = (\bar{v}_1, z_2, z_3)' - \mathrm{Ad}^X(\bar{g}^{-1})v_r - v^\star(\bar{g}) \\ \quad = T(-f_1)(\bar{v} - f_{23}) - \mathrm{Ad}^X(\bar{g}^{-1})v_r - v^\star(\bar{g}) \end{array} \tag{36}$$

avec

$$T(f_1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & af_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

et v^* une fonction spécifiée ci-dessous. Lorsque $\bar{\xi} = 0$, et f est "petite" (i.e. ε_1 et ε_2 dans (32) sont proches de zéro), $\bar{v}$ est approximativement donné par $\mathrm{Ad}^X(\bar{g}^{-1})v_r + v^\star(\bar{g})$. Si de plus h_1 reste proche de e (ce qui est est le cas si $h_1(0)$ est choisi proche de e), une approximation du système (29) est

$$\dot{\bar{g}} = X(\bar{g})v^\star(\bar{g}) \tag{37}$$

En choisissant v^* de sorte que l'origine $\bar{g} = e$ soit un équilibre asymptotiquement stable du système (37), on peut espérer que $\bar{g}$, et donc $\tilde{g}$, reste proche de e. Afin de concrétiser cette démarche intuitive, il faut donc montrer que *i)* on peut stabiliser $\bar{\xi}$ à zéro par le choix des commandes u_1, u_2, et $\dot{\alpha}$, et *ii)* cette stabilisation implique la convergence de l'erreur de suivi $\tilde{g}$ vers un "petit voisinage" de e.

Stabilisation de $\bar{\xi} = 0$: La dérivée de $\bar{\xi}$ le long des solutions du système est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\bar{\xi}}_1 & = & u_1 + \varepsilon_1 \dot{\alpha}^2 \sin\alpha - \varepsilon_1 \ddot{\alpha} \cos\alpha + r_1 + \bar{\xi}_1 s_1 \\ \begin{pmatrix} \dot{\bar{\xi}}_2 \\ \dot{\bar{\xi}}_3 \end{pmatrix} & = & M(\alpha) \begin{pmatrix} u_2 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \bar{\xi}_1 \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{38}$$

avec $M(\alpha)$ la matrice inversible $(\forall \alpha)$ définie par

$$M(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_2 \sin\alpha \\ -a\varepsilon_1 \sin\alpha & \frac{a\varepsilon_1\varepsilon_2}{2} \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

et r_i, s_i $(i = 1, 2, 3)$, des fonctions dépendant de $\bar{g}, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, \alpha, v_r$, et $\dot{v}_r$, mais pas de $\bar{\xi}_1$. Il n'est alors pas difficile de synthétiser une loi de commande stabilisant $\bar{\xi} = 0$:

Lemma 1 *Considérons le retour d'état régulier*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} u_2 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} & := & M(\alpha)^{-1} \left(-k \begin{pmatrix} \bar{\xi}_2 \\ \bar{\xi}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \right) \\ u_1 & := & -\varepsilon_1 \dot{\alpha}^2 \sin\alpha + \varepsilon_1 \alpha^{(2)} \cos\alpha - r_1 \\ & & -\bar{\xi}_1 s_1 - k\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 s_2 - \bar{\xi}_3 s_3 \end{array} \right. \tag{39}$$

avec $k > 0$ et $\alpha^{(2)}$ la fonction dépendant de $\bar{g}, \bar{\xi}, \alpha, v_r, \dot{v}_r$, et $\ddot{v}_r$, dont la valeur coïncide avec la dérivée temporelle de la commande $\dot{\alpha}$ le long des solutions du système contrôlé. Alors, par application de ce retour d'état (dynamique) au système (26)*, $\frac{d}{dt}\|\bar{\xi}\|^2 = -2k\|\bar{\xi}\|^2$ et $\bar{\xi} = 0$ est donc exponentielle stable.*

Stabilité pratique de $\tilde{g} = e$: Avant de donner le résultat de stabilité de $\tilde{g} = e$, il est nécessaire de spécifier la fonction v^*. Cette fonction doit être différentiable et choisie de sorte que $\bar{g} = e$ soit un équilibre localement exponentiellement stable du "système idéal" (37). Dans un système de coordonnées autour de $\bar{g} = e$, il suffit de choisir un retour d'état linéaire qui rend l'origine du "système linéaire" $\dot{\bar{g}} = X(e)v^*$ asymptotiquement stable. Dès lors, à partir de l'équation du système bouclé (29)–(36) et du Lemme 1, on peut établir le résultat suivant (voir [22] pour la preuve)

Proposition 3 *Soit v^* une fonction différentiable qui rend l'origine du système* (37) *localement exponentiellement stable. Posons $h_1(0) := e$, $\alpha(0) = \pm\pi/2$, et désignons par η la fonction de classe*[3] *$\mathcal{K}$ telle que $\max_\alpha(\|f(\alpha)\| + \mathrm{dg}(h_1, e) + \|I_3 - \mathrm{Ad}^X(h_1)\|) \leq \eta(\varepsilon)$ avec $\varepsilon := \|(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\|$, et* dg *une distance sur G. Alors, pour toute constante K_r, il existe $\varepsilon_0, \gamma_g, \gamma_v, \beta > 0$ tels que , pour toute trajectoire de référence g_r telle que $\|v_r\| \leq K_r$, et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,*

$$\left. \begin{array}{r} \mathrm{dg}(\tilde{g}(0), e) \leq \gamma_g \\ \|(v - v_r)(0)\| \leq \gamma_v \end{array} \right\} \Rightarrow \mathrm{dg}(\tilde{g}, e) \text{ est a.b. par } \beta\eta(\varepsilon)$$

*où "*a.b.*" signifie "asymptotiquement bornée". De plus, si $\|\dot{v}_r(t)\|$ et $\|\ddot{v}_r(t)\|$ sont bornées, alors $\|v(t)\|$ et les commandes $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $\dot{\alpha}(t)$, sont bornées.*

Commentons brièvement ce résultat. Etant donnée une borne sur les vitesses associées à la trajectoire de référence, et sous réserve d'une erreur initiale suffisamment petite et d'un ε petit également, on garantit *i)* la bornitude de l'erreur de suivi, *ii)* la possibilité (en théorie) de réduire cette erreur autant que l'on veut en choisissant ε_1 et ε_2 petits, et *iii)* l'existence d'un domaine d'attraction *uniforme* par rapport à la trajectoire de référence et par rapport à ε.

Conclusion

La stabilisation de trajectoires recouvre plusieurs problématiques qui ont jusqu'à présent été abordées avec des techniques différentes. De nombreuses applications, qui ne requièrent pas un contrôle actif de l'orientation du véhicule, peuvent être traitées par des méthodes d'automatique très classiques. Lorsqu'un contrôle en orientation est nécessaire, des techniques plus élaborées doivent être utilisées, avec des limitations en pratique, comme par exemple l'impossibilité de garantir des propriétés de stabilisation *asymptotique* sans connaissance à priori sur la trajectoire à stabiliser. La plupart de ces limitations peuvent être contournées en relâchant l'objectif de commande au profit d'une stabilisation *pratique* (i.e. stabilisation d'un petit voisinage d'un point). En outre, il devient alors possible de stabiliser des trajectoires générales (i.e. non réalisables par le véhicule commandé), ce qui augmente le champ d'application de ces systèmes. L'approche de commande par fonctions transverses offre un cadre théorique assez général pour la synthèse de tels "stabilisateurs pratiques". Une validation expérimentale sur un véhicule de type unicycle a montré ses potentialités, et nous espérons que cet article suscitera des intérêts et collaborations en vue d'autres applications.

[3] Rappelons que $\eta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$ si $\eta(0) = 0$ et η est strictement croissante.

Références

[1] G. Artus. *Application de l'approche par fonctions transverses à la commande de véhicules non-holonomes manœuvrants*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005.

[2] G. Artus, P. Morin, and C. Samson. Control of a maneuvering mobile robot by transverse functions. In *Symp. on Advances in Robot Kinematics (ARK)*, pages 459–468, 2004.

[3] R.W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*. Birkauser, 1983.

[4] F. Bullo, N.H. Leonard, and A.D. Lewis. Controllability and motion algorithms for underactuated lagrangian systems on Lie groups. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45 :1437–1454, 2000.

[5] G. Campion, G. Bastin, and B. d'Andrea Novel. Structural properties and classification of kynematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 12 :47–62, 1996.

[6] G. Campion, B. d'Andrea Novel, and G. Bastin. Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems. In *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 1184–1189, 1991.

[7] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, and G. Bastin, editors. *Theory of robot control*. Springer Verlag, 1996.

[8] C.-T. Chen. *Linear system theory and design*. Oxford University Press, 1984.

[9] J.-M. Coron. Stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback laws. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33 :804–833, 1995.

[10] I. Fantoni and R. Lozano. *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer-Verlag, 2002.

[11] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems. In *European Control Conference (ECC)*, pages 1882–1887, 1995.

[12] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61 :1327–1361, 1995.

[13] T. Hamel, R. Mahony, R. Lozano, and J. Ostrowski. Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer. In *IFAC World Congress*, 2002.

[14] A.D. Lewis and R.M. Murray. Configuration controllability of simple mechanical control systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35 :766–790, 1997.

[15] A.D. Lewis, J.P. Ostrowski, R.M. Murray, and J.W. Burdick. Nonholonomic mechanics and locomotion : the snakeboard example. In *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 2391–2397, 1994.

[16] D.A. Lizárraga. Obstructions to the existence of universal stabilizers for smooth control systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 16 :255–277, 2004.

[17] P. Morin. Stabilisation de systèmes non linéaires critiques et application à la commande de véhicules, 2004. Habilitation à Diriger des Recherches, disponible sur http ://www.inria.fr/rrrt/th-049.html.

[18] P. Morin and C. Samson. A characterization of the Lie algebra rank condition by transverse periodic functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(4) :1227–1249, 2001.

[19] P. Morin and C. Samson. Commande. In J.-P. Laumond, editor, *La robotique mobile*. Hermes, 2001.

[20] P. Morin and C. Samson. Practical stabilization of driftless systems on Lie groups : the transverse function approach. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48 :1496–1508, 2003.

[21] P. Morin and C. Samson. Trajectory tracking for nonholonomic vehicles : overview and case study. In K. Kozlowski, editor, *4th Inter. Workshop on Robot Motion Control (RoMoCo)*, pages 139–153, 2004.

[22] P. Morin and C. Samson. Control of underactuated mechanical systems by the transverse function approach. Technical report, INRIA, 2005. Disponible sur http ://www.inria.fr/rrrt/rr-5525.html.

[23] R.M. Murray, Z. Li, and S.S. Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC Press, 1994.

[24] C. Samson and K. Ait-Abderrahim. Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space. In *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1136–1141, 1991.

[25] E. D. Sontag. Universal nonsingular controls. In *Systems & Control Letters*, volume 19, pages 221–224, 1992.

[26] H.J. Sussmann. A general theorem on local controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25 :158–194, 1987.

[27] R.L. Toro. Modélisation et commande d'un objet volant à voilure tournante possédant une seule hélice. Master's thesis, UTC, Heudyasic, 2003.

[28] F.W. Warner. *Foundations of differential manifolds and Lie groups*. Springer Verlag, 1983.