LA DERIVATION NON ENTIERE EN ISOLATION VIBRATOIRE : Application au Controle Global de la Suspension de Vehicule

Xavier MOREAU, Pascal SERRIER et Alain OUSTALOUP

Equipe CRONE - LAPS - UMR 5131 CNRS - ENSEIRB - Université Bordeaux 1 351, cours de la Libération - 33 405 - Talence Cedex - FRANCE Tel. 33 (0) 540 002 417 - Fax. 33 (0) 540 006 644 - E-mail : <u>xavier.moreau@laps.u-bordeaux1.fr</u>

Résumé

Si le concept et le formalisme mathématique de la dérivation non entière (réelle ou complexe) sont issus des travaux de mathématiciens célèbres tels que Laplace, Liouville, Abel, Riemann et Cauchy, remontant ainsi au début du XIX^{ème} siècle, sa synthèse et ses applications dans les sciences physiques et les sciences pour l'ingénieur relèvent des contributions scientifiques de la seconde moitié du XX^{ème} siècle et du début du XXI^{ème} siècle [Dug 94].

Les travaux qui font l'objet de cet article s'inscrivent dans le cadre de ces contributions scientifiques, le contexte d'étude étant plus particulièrement celui de la dérivation non entière en isolation vibratoire et ses applications dans le secteur de l'automobile. Plus précisément, après une introduction générale pour situer le contexte, la deuxième partie est d'abord consacrée aux définitions et aux interprétations de la dérivation non entière, puis à la synthèse d'un dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence. La troisième partie traite plus particulièrement de la dérivation non entière en isolation vibratoire. Le schéma fonctionnel établi à partir des équations d'un modèle à un degré de liberté met en évidence qu'une suspension joue le même rôle que le régulateur d'une boucle de commande. Ainsi, compte tenu de ce constat, la conception d'une suspension peut être développée en utilisant les méthodes de synthèse des commandes robustes comme par exemple la commande CRONE et ses trois générations qui ont donné lieu à la suspension CRONE. Enfin, la dernière partie est consacrée au Contrôle Global de la Suspension (CGS) d'un véhicule où l'objectif est de réguler les trois degrés de liberté de la caisse (Pompage, Tangage et Roulis : PTR) autour de la position d'équilibre statique (PTR = 0 : objectif de confort des passagers) ainsi que la Répartition Anti-Devers (RAD : objectif de correction de la trajectoire du véhicule par action sur la suspension). Cette stratégie s'inscrit dans un cadre plus large, à savoir le Contrôle Globale du Châssis (CGC) où l'objectif est de coordonner les actions des organes des différentes fonctions du châssis (direction, freinage et suspension) afin d'augmenter la sécurité active du véhicule.

1 – Généralisation de l'ordre de dérivation

1.1 – Intégration non entière

1.1.1 - Définition

Inspirée de la formule de Cauchy, la définition de Riemann-Liouville de **l'intégrale d'ordre** *m* d'une fonction f(t), notée $I^m f(t)$ avec m > 0, a été établie au XIX^{ème} siècle sous la forme :

$$I_{t_0}^{m} f(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\Gamma(m) (t - \tau)^{1-m}} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

avec $t > t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}^+$ et où $\Gamma(m)$ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(m) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} dx . \qquad (2)$$

1.1.2 – Interprétation

Dans le cadre d'une approche système où u(t) désigne l'entrée et y(t) la sortie, l'intégrale d'ordre m de u(t), notée $y(t) = I^m u(t)$, soit :

$$y(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\Gamma(m) (t-\tau)^{1-m}} u(\tau) d\tau , \qquad (3)$$

peut être interprétée comme le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle h(t) du système et son entrée u(t), soit :

$$v(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau = h(t) * u(t).$$
 (4)

La transformée de Laplace H(s) qui n'est autre que la fonction de transfert du système est donnée par :

$$H(s) = TL\{h(t)\} = TL\left\{\frac{1}{\Gamma(m)t^{(1-m)}}\right\} = \frac{1}{s^m}.$$
 (5)

La figure 1 présente les réponses fréquentielles et impulsionnelles de l'intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2.

1.2 – Dérivation non entière

1.2.1 – Définition

La définition de Riemann-Liouville de l'intégrale d'ordre *m* d'une fonction f(t), notée $I^m f(t)$ avec m > 0, étendue à des ordres négatifs, soit :

$$I_{t_0}^{-m} f(t) = D_{t_0}^m f(t) , \qquad (6)$$

est en générale divergente. La manière la plus simple pour définir une dérivée d'ordre m > 0 (intégrale

d'ordre négatif) consiste à dériver à l'ordre entier n, avec n = Ent[m] + 1, l'intégrale d'ordre n-m > 0, soit :

$$D_{t_0}^m f(t) \stackrel{\Delta}{=} D_{t_0}^{m-n+n} f(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)^{(n)} D_{t_0}^{-(n-m)} f(t) , \quad (7)$$

ou encore, sachant que $D_{t_0}^{-(n-m)}f(t) = I_{t_0}^{(n-m)}f(t)$,

$$D_{t_0}^m f(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)^{(n)} \int_{t_0}^t \frac{1}{\Gamma(n-m)(t-\tau)^{1-(n-m)}} f(\tau) d\tau , \quad (8)$$

où n = Ent[m] + 1. A titre d'exemple :

$$D_{t_0}^{0.75} f(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)^{(1)} I_{t_0}^{0.25} f(t) . \tag{9}$$



Figure 1 - Réponses fréquentielles et impulsionnelles de l'intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2

1.2.2 – Dérivateur généralisé

Dans le cadre d'une approche systémique, un dérivateur généralisé est défini par un transfert de la forme

$$D(s) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{s}{\omega_d}\right)^m , \qquad (10)$$

où $m \in R$ et ω_d est appelée fréquence transitionnelle. Ainsi, pour des ordres strictement positifs la relation (10) définit un dérivateur d'ordre non entier et pour des ordres strictement négatifs un intégrateur d'ordre non entier.

La figure 2 présente les diagrammes de Bode d'un dérivateur généralisé.



Figure 2 – Diagrammes de Bode d'un dérivateur généralisé

1.2.3 – Dérivateur généralisé borné en fréquence

Aussi bien dans le cadre de la caractérisation que dans celui de la synthèse de comportements d'ordre non entier, ces derniers se situent souvent sur un intervalle fréquentiel borné. Ainsi, une troncature à la fois du côté des basses et des hautes fréquences consiste à limiter à un intervalle fréquentiel le transfert de différentiation $(s/\omega_d)^m$, ce qui revient à lui substituer le transfert de différentiation borné en fréquence :

$$D(s) = D_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m , \qquad (11)$$

avec $(\omega_b \omega_h)^{1/2} = \omega_d$ et $D_0 = (\omega_b / \omega_d)^m$, $D_0 \in \Re$. (12) La figure 3 présente les diagrammes asymptotiques de Bode d'un dérivateur généralisé borné en fréquence.



Figure 3 – Diagrammes asymptotiques de Bode d'un dérivateur généralisé borné en fréquence pour m = 1.5 et - 1.5

1.2.4 – Synthèse fondée sur la récursivité fréquentielle d'un dérivateur généralisé borné en fréquence

La synthèse repose sur une distribution récursive de *N* zéros et pôles réels, soit [Ous 96]:

$$D(s) = \lim_{N \to \infty} D_N(s) \quad , \tag{13}$$

avec
$$D_N(s) = D_0 \prod_{i=0}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{\frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}}} \right)$$
, (14)

où les relations de passage entre les paramètres de la forme idéale D(s) et ceux de la forme réelle $D_N(s)$ sont données par :

$$\alpha \eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\overline{N}}, \ \eta = (\alpha \eta)^{1-m}, \ \alpha = (\alpha \eta)^m,$$
$$\omega_1' = \sqrt{\eta} \omega_b \quad , \ \omega_N = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \omega_h \quad , \ \frac{\omega_i}{\omega_i} = \alpha > 1, \quad (15)$$
$$\frac{\omega_{i+1}'}{\omega_i} \eta > 1 \quad et \quad \frac{\omega_{i+1}'}{\omega_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \alpha \eta > 1.$$

La figure 4 présente les diagrammes de Bode de la forme idéale d'un dérivateur généralisé borné en fréquence ainsi que ceux de la forme réelle correspondante.



Figure 4 – Diagrammes de Bode de la forme idéale d'un dérivateur généralisé borné en fréquence ainsi que ceux de la forme réelle correspondante

1.2.5 – Réalisation technologique d'un dérivateur généralisé borné en fréquence

Quelle que soit la technologie retenue (électrique, mécanique, hydropneumatique,...), une des solutions technologiques envisageables est l'utilisation d'arrangements de cellules résistives et capacitives (cellules RC). Par exemple, dans le cadre de l'isolation vibratoire, l'utilisation de la technologie hydropneumatique conduit principalement à deux arrangements (figure 5) :

- un arrangement parallèle de cellules RC en série ;

- un arrangement en cascade de cellules RC en gamma.



Figure 5 – Réseaux hydropneumatiques pour la réalisation d'un dérivateur généralisé borné en fréquence

2 – La dérivation non entière en isolation vibratoire

2.1 - Principe de l'isolation vibratoire

Lors d'une étude de principe, un modèle à un degré de liberté est très souvent utilisé car sa simplicité permet de formaliser facilement l'objectif et la problématique de l'isolation vibratoire (Figure 6). Ce modèle est constitué d'une masse suspendue M (modélisant les effets inertiels du dispositif à isoler supposé indéformable) et d'une suspension dont la loi de comportement est plus ou moins complexe selon la solution (active, pilotée ou passive). $z_1(t)$ représente le déplacement vertical de la masse suspendue défini par rapport à la position *d'équilibre statique* et $z_{10}(t) = z_1(t) - z_0(t)$ le débattement de la suspension. Les sources de vibrations, quant à elles, ont principalement deux origines : les déplacements $z_0(t)$ du support ou de la fondation qui résultent de l'environnement vibratoire dans lequel le dispositif est placé et/ou les efforts $f_0(t)$ générés par le dispositif lui-même. L'exemple d'un moteur thermique d'un véhicule est significatif de cette configuration puisque le moteur est une source de vibrations fonctionnant lui-même dans un environnement vibratoire qui est le résultat d'une combinaison des irrégularités du sol et de la vitesse d'avancement du véhicule [Mit 88].



Figure 6 - Modèle général à 1 degré de liberté

Un certain nombre de travaux [Ram 01] ont montré, à partir d'un modèle à un degré de liberté (Figure 6), qu'une suspension développant une force u(t) fonction de son débattement $z_{10}(t)$, soit

$$U(s) = -C(s)Z_{10}(s), \qquad (16)$$

où C(s) désigne la fonction de transfert force-débattement de la suspension, réalise naturellement une régulation du débattement autour de la *position d'équilibre statique*. En effet, l'application du principe fondamental de la dynamique conduit à une équation différentielle de la forme :

$$M \ddot{z}_1(t) = f_0(t) + u(t).$$
(17)

Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation (17) s'écrit, en tenant compte de la relation (16) :

$$M s^{2} Z_{1}(s) = F_{0}(s) - C(s) Z_{10}(s), \qquad (18)$$

d'où l'on tire l'expression de $Z_I(s)$, soit :

$$Z_1(s) = \frac{1}{M s^2} \left[F_0(s) - C(s) Z_{10}(s) \right].$$
(19)

L'expression du débattement $Z_{10}(s) = Z_1(s) - Z_0(s)$ est alors définie par :

$$Z_{10}(s) = \frac{1}{Ms^2} \left[F_0(s) - C(s) Z_{10}(s) \right] - Z_0(s), \quad (20)$$

expression de la forme :

$$Z_{10}(s) = G(s) [F_0(s) - C(s) Z_{10}(s)] - Z_0(s), \quad (21)$$

nt
$$G(s) = \frac{1}{M s^2}. \quad (22)$$

(22)

en posant

La figure 7 présente le schéma fonctionnel associé à la relation (21).



Figure 7 - Schéma fonctionnel du modèle à 1ddl présenté figure 6

2.2 – Méthode originale de conception d'une suspension

Le schéma fonctionnel de la figure 7 montre clairement que la suspension a le même rôle que le régulateur C(s)d'une boucle de commande. Les sollicitations en déplacement $z_0(t)$ et en effort $f_0(t)$ apparaissent comme des perturbations, respectivement en sortie et en entrée du procédé G(s) qui se résume dans cette approche monovariable à un double intégrateur dont la fréquence transitionnelle dépend de la masse suspendue. La fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ a alors pour expression :

$$\beta(s) = C(s) \ G(s) \ . \tag{23}$$

Ainsi, la démarche de conception du dispositif de suspension peut exploiter les outils et les méthodes modernes d'analyse et de synthèse développés en commande robuste, en particulier en commande CRONE.

2.3 – Commande CRONE et suspension CRONE

L'utilisation de la méthode de synthèse de la commande CRONE pour concevoir une suspension, appelée alors suspension CRONE, conduit à une expression du transfert force-débattement C(s) qui n'est autre que celle du transfert D(s) d'un dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence [Ous 95], soit :

$$C(s) = D(s) = D_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}}\right)^m, \qquad (24)$$

où D_0 désigne le gain statique, *m* l'ordre de dérivation compris entre 0 et 1, ω_b et ω_h les fréquences transitionnelles basse et haute. D_0 , m, ω_b et ω_h constituent dans l'approche CRONE les paramètres de synthèse de haut niveau. Le lecteur intéressé trouvera dans [Ram 01] tous les détails de la méthode de synthèse de la suspension CRONE.

2.4 – Exemple d'illustration

L'exemple d'illustration est un banc hydraulique qui permet d'étudier le régime libre d'une masse M reliée mécaniquement à un vérin hydraulique simple effet (Figure 8). La masse minimale de 75 kg peut être augmentée grâce à la présence de masses additionnelles sous forme de disques en fonte. Ainsi, M peut varier de 75 à 150 kg.



Figure 8 – Schéma hydraulique du banc d'essai permettant d'étudier le régime libre d'une masse suspendue M pour des valeurs comprises entre 75 et 150 kg

Ce vérin de suspension est connecté à un circuit hydraulique composé de deux parties. La première est constituée d'un groupe électropompe équipé d'un conjoncteur-dijoncteur et d'un distributeur proportionnel. Son rôle est de maintenir à une hauteur constante la masse M quelle que soit sa valeur et ce grâce à la présence d'une boucle de régulation. La seconde comporte un distributeur 3/2 (3 orifices, 2 positions) permettant de sélectionner soit un arrangement parallèle de deux cellules dont une RC (N = 1 pour une suspension traditionnelle hydropneumatique), soit un arrangement parallèle de six cellules dont cinq RC (N =5 pour la suspension CRONE hydropneumatique).

Le schéma de commande associé au dispositif expérimental est présenté figure 9. La boucle externe qui régule la position d'équilibre statique à une valeur égale à la moitié de la course du vérin de suspension, présente une rapidité identique à celle du régulateur de hauteur d'une suspension hydropneumatique, rapidité caractérisée par une fréquence au gain unité en boucle ouverte de 0.1 rad/s. Quant à la boucle interne déjà présentée au paragraphe 2.1, elle présente une rapidité identique à celle du mode de pompage de la masse suspendue d'un véhicule de tourisme équipé d'une suspension hydropneumatique, rapidité caractérisée par une fréquence au gain unité en boucle ouverte de 6 rad/s. Ces deux boucles sont donc dynamiquement découplées, c'est la raison pour laquelle seule la boucle interne est étudiée dans la suite de ce document.



Figure 9 – Schéma de commande associé au dispositif expérimental présenté figure 8

2.4.1 – Relations entre les paramètres physiques et la distribution récursive de pôles et de zéros

L'impédance hydraulique d'entrée de chacun des arrangements parallèles est caractérisée par une expression de la forme :

$$\frac{P_e(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{C_0 s + \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i s}}},$$
 (25)

où $P_e(s)$ et $Q_e(s)$ désignent la pression et le débit à l'entrée de l'arrangement, R_i et C_i la résistance et la capacité de la cellule de rang *i*, capacité dont l'expression est obtenue en linéarisant la caractéristique pression-volume de l'accumulateur autour d'un point d'équilibre défini par la pression statique P_s et le volume V_{si} occupé par le gaz, soit :

$$\frac{1}{C_i} = -\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_{\substack{P=Ps\\V=Vsi}} = \gamma \frac{P_s}{V_{si}},$$
(26)

 γ étant le coefficient thermodynamique qui caractérise la transformation du gaz ($\gamma = 1$ pour une transformation isotherme, $\gamma = 1.4$ pour une transformation adiabatique). Sachant que le produit entre la pression et le volume de gaz est constant (PV = cste), le volume V_{si} peut être exprimé en fonction de la pression de gonflage P_{0i} et du volume V_{0i} de l'accumulateur de rang *i* (volume initial occupé par le gaz avant montage), soit :

$$V_{si} = \frac{P_{0i}}{P_s} V_{0i} \,, \tag{27}$$

d'où l'expression de la capacité C_i :

$$C_{i} = \frac{P_{0i} V_{0i}}{\gamma P_{s}^{2}} .$$
 (28)

La résistance R_i , quant à elle, est dimensionnée pour que l'écoulement soit laminaire, d'où son expression :

$$R_i = \frac{128}{\pi} \,\mu \, \frac{l_{Ri}}{d_{Ri}^4} \,\,, \tag{29}$$

où μ représente la viscosité dynamique du fluide hydraulique, l_{Ri} et d_{Ri} respectivement la longueur et le diamètre de la résistance.

Les deux expressions (28) et (29) définissent les relations entre les paramètres physiques hydropneumatiques et les paramètres technologiques.

Par ailleurs, la pression $P_e(s)$ à l'entrée de l'arrangement n'est autre que la pression dans le vérin (si les pertes de charges dans la canalisation de raccordement et dans le distributeur 3/2 sont négligeables). C'est la raison pour laquelle la pression $P_e(s)$ est liée à l'effort U(s)développé par le vérin sur la masse M par une relation de la forme :

$$P_e(s) = \frac{U(s)}{S_v},\tag{30}$$

où S_v désigne la section du vérin.

De plus, en dehors des phases de fonctionnement du correcteur de hauteur, le débit $Q_e(s)$ à l'entrée de l'arrangement est lié au débattement $Z_{10}(s)$ du vérin par une relation de la forme :

$$Q_e(s) = S_v \ s \ Z_{10}(s)$$
. (31)

En remplaçant dans la relation (25) $P_e(s)$ par son expression (30) et $Q_e(s)$ par son expression (31), on obtient l'expression du transfert force-débattement $D_N(s)$, soit :

$$D_N(s) = S_v^2 \ s \ \frac{P_e(s)}{Q_e(s)} = \frac{S_v^2 \ s}{C_0 \ s + \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i \ s}}}, (32)$$

ou encore, en divisant le dénominateur par $S_v^2 s$,

$$D_N(s) = \frac{1}{\frac{C_0}{S_v^2} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i S_v^2 s + \frac{S_v^2}{C_i}}},$$
(33)

expression de la forme

$$D_N(s) = \frac{1}{\frac{1}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{b_i \, s + k_i}},$$
(34)

en posant $k_0 = \frac{S_v^2}{C_0}, \ k_i = \frac{S_v^2}{C_i} \ et \ b_i = S_v^2 R_i.$ (35)

 k_0 et k_i sont homogènes à des raideurs exprimées en N/m et b_i à un coefficient de frottement visqueux exprimé en Ns/m, d'où le schéma mécanique présenté figure 10 équivalent à l'arrangement hydraulique.



Figure 10 – Schéma mécanique équivalent à l'arrangement hydraulique

Finalement, $D_N(s)$ peut se mettre sous la forme :

$$D_N(s) = \frac{1}{\frac{1}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1/b_i}{s + \omega_{zi}}},$$
(36)

en posant

$$\omega_{zi} = k_i / b_i \,. \tag{37}$$

Afin d'établir les relations entre les paramètres mécaniques k_i et b_i (ou hydropneumatiques C_i et R_i) et la distribution récursive des fréquences transitionnelles ω_i et ω_i , l'inverse de la relation (34), soit :

$$D_N^{-1}(s) = \frac{1}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1/b_i}{s + \omega_{zi}},$$
 (38)

est interprété comme étant la décomposition en éléments simples de l'inverse de la relation (14), soit :

$$D_N^{-1}(s) = \frac{1}{D_0} \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right) = \frac{1}{D_0} \prod_{i=1}^N \frac{\omega_i}{\omega_i} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s + \omega_i}, (39)$$

avec

$$A_{i} = \frac{1}{D_{0}} \left(\prod_{l=1}^{N} \frac{\omega_{l}^{'}}{\omega_{l}} \right) \left(\frac{\prod_{l=1}^{N} \left(\omega_{l} - \omega_{i}^{'} \right)}{\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{N} \left(\omega_{l}^{'} - \omega_{i}^{'} \right)} \right) \quad . \tag{40}$$

L'identification membre à membre des relations (38) et (39) permet de déterminer les paramètres mécaniques k_0 , b_i et k_i , soit :

$$k_0 = D_0 \prod_{i=1}^{N} \frac{\omega_i}{\omega_i}, \quad b_i = \frac{1}{A_i} \quad et \quad k_i = \omega_i' b_i , \quad (41)$$

ainsi que les paramètres hydropneumatiques C_0 , R_i et C_i , soit compte tenu des relations (35) :

$$C_0 = \frac{S_v^2}{k_0}, \ C_i = \frac{S_v^2}{k_i} \quad et \quad R_i = \frac{b_i}{S_v^2} \quad .$$
(42)

Enfin, les paramètres technologiques tels que la pression de gonflage P_{0i} et le volume V_{0i} de chaque accumulateur, le diamètre d_{Ri} et la longueur l_{Ri} de chaque résistance, sont déduits des relations (28) et (29) en prenant en compte les contraintes technologiques associées à chaque composant.

2.4.2 – Performances

Remarque importante

La pression statique P_s dont dépend chacune des capacités (relation (28)) peut s'exprimer en fonction du poids Mg et de la section S_v du vérin, soit :

$$P_s = \frac{Mg}{S_v}.$$
 (43)

En remplaçant dans la relation (28) P_s par son expression (43), on constate que les capacités C_i , et donc les raideurs k_i , dépendent notamment du carré de la masse suspendue M, soit :

$$C_{i} = \frac{S_{v}^{2} P_{0i} V_{0i}}{\gamma (Mg)^{2}} \quad et \quad k_{i} = \gamma \frac{(Mg)^{2}}{P_{0i} V_{0i}}.$$
 (44)

Ainsi, les variations ou incertitudes de la masse suspendue *M* affectent, non seulement le procédé G(s), mais aussi la forme réelle $D_N(s)$ du régulateur compte tenu des relations entre les paramètres physiques et les paramètres de $D_N(s)$.

Ce résultat conduit à une problématique nouvelle en matière de commande dans la mesure où les incertitudes du régulateur sont toujours considérées comme négligeables devant celles du procédé, problématique renforcée dans ce cas particulier lié à la technologie hydropneumatique par le couplage entre les incertitudes du procédé et celles du régulateur.

Le lecteur intéressé trouvera dans [Ser 04] les détails de la méthode développée pour la prise en compte des particularités liées à la technologie hydropneumatique lors de la synthèse d'un dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence. Il est notamment démontré que les paramètres récursifs α et η sont indépendants des variations de la masse M. Ainsi le comportement asymptotique d'ordre non entier de $D_N(j\omega)$, caractérisé pour le diagramme de gain par une pente de m20dB/dec et pour le diagramme de phase par un blocage de phase de $m\pi/2$, n'est pas modifié ; seule la plage fréquentielle où ce comportement asymptotique existe est translatée vers les hautes fréquences quand la masse augmente (et réciproquement vers les basses fréquences quand elle diminue). De plus, il est démontré que la fréquence au gain unité en boucle ouverte reste insensible aux variations de *M*. Ces deux résultats se traduisent alors sur la dynamique en boucle fermée, non seulement par la robustesse du degré de stabilité (propriété intrinsèque à l'approche CRONE), mais aussi par la robustesse de la rapidité (propriété intrinsèque à la technologie hydropneumatique). Les performances présentées dans la suite de ce paragraphe illustrent ces propriétés remarquables.

A partir des spécifications [Serrier, 04], à savoir :

- pour *la rapidité*, une fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u de 6 rad/s ;
- pour *le degré de stabilité*, une marge de phase M_{ϕ} de 45°;
- pour *les incertitudes*, $M \in [75 kg; 150 kg]$,

les quatre paramètres de synthèse de haut niveau de la forme idéale D(s) pour le chargement minimal M = 75 kg sont calculés conformément aux relations définies dans [Ous 95], soit :

$$m = 0.5, \ \omega_b = 0.1 \ rad / s,$$

 $\omega_b = 90 \ rad / s \ et \ D_0 = 349 \ N / m$ (45)

Ensuite, grâce aux relations entre les quatre paramètres de synthèse de haut niveau et les 2N paramètres de la forme réelle, les fréquences transitionnelles de la distribution récursive sont calculées toujours pour le chargement minimal avec N = 5, soit :

$$\alpha = \eta = 1.975,$$

$$\omega'_{1} = 0.1405 \ rad/s, \quad \omega_{1} = 0.2774 \ rad/s,$$

$$\omega'_{2} = 0.5477 \ rad/s, \quad \omega_{2} = 1.081 \ rad/s,$$

$$\omega'_{3} = 2.1350 \ rad/s, \quad \omega_{3} = 4.215 \ rad/s,$$

$$\omega'_{4} = 8.3265 \ rad/s, \quad \omega_{4} = 16.432 \ rad/s,$$

$$\omega'_{5} = 32.440 \ rad/s, \quad \omega_{5} = 65.05 \ rad/s.$$
(46)

Puis, compte tenu des relations (41) issues de la décomposition en éléments simples, les paramètres physiques sont calculés, soit :

$$k_{0} = 10468 N/m,$$

$$k_{1} = 578 N/m, \quad b_{1} = 4111 Ns/m,$$

$$k_{2} = 1722 N/m, \quad b_{2} = 3144 Ns/m,$$

$$k_{3} = 3681 N/m, \quad b_{3} = 1724 Ns/m,$$

$$k_{4} = 7649 N/m, \quad b_{4} = 919 Ns/m,$$

$$k_{5} = 17749 N/m, \quad b_{5} = 547 Ns/m.$$
(47)

Enfin, sachant que la section S_v du vérin étant de 3.14 cm², les paramètres technologiques sont déduits à partir des relations (28) et (29), soit :

- pour les accumulateurs (choix dans un catalogue fournisseur pour les volumes V_{0i}):

$$P_{00} = 7 \ bar, \ V_{00} = 75 \ cm^3,$$

$$P_{01} = 13 \ bar, \ V_{01} = 750 \ cm^3,$$

$$P_{02} = 8 \ bar, \ V_{02} = 400 \ cm^3,$$

$$P_{03} = 15 \ bar, \ V_{03} = 100 \ cm^3,$$

$$P_{04} = 10 \ bar, \ V_{04} = 75 \ cm^3,$$

$$P_{05} = 5 \ bar, \ V_{05} = 75 \ cm^3,$$

(48)

- pour les résistances :

$$\begin{aligned} &d_{R1} = 3 \ mm, \quad l_{R1} = 23 \ mm, \\ &d_{R2} = 3 \ mm, \quad l_{R2} = 17.6 \ mm, \\ &d_{R3} = 3.5 \ mm, \quad l_{R3} = 17.87 \ mm, \\ &d_{R4} = 4 \ mm, \quad l_{R4} = 16.25 \ mm, \\ &d_{R5} = 4.5 \ mm, \quad l_{R5} = 15.5 \ mm. \end{aligned}$$

Dans le cadre d'une étude comparative, les paramètres de l'arrangement à deux cellules (dont une RC, soit N = 1 pour la suspension traditionnelle) sont calculés à partir des mêmes spécifications que précédemment. Ainsi, pour la masse minimale de 75 kg, les deux systèmes présentent la même dynamique.

Dans la mesure où N = 1, l'expression du transfert $D_1(s)$ se résume à celui d'un régulateur à avance de phase, soit :

$$D_1(s) = D_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_2}} \right), \tag{50}$$

avec $\omega_1 < \omega_2$.

Les trois paramètres ω_l , ω_2 et D_0 sont déterminés conformément à la méthode classique de calcul d'un régulateur à avance de phase dans l'espace des fréquences, soit pour le chargement minimal :

$$\omega_1 = 2.485 \ rad / s, \ \omega_2 = 14.5 \ rad / s$$

et $D_0 = 1118 \ N/m$ (51)

De la même manière que précédemment, on en déduit : - les paramètres physiques, soit :

$$k_0 = 6518 N/m$$
,

$$k_1 = 1350 \ N/m, \ b_1 = 543 \ Ns/m.$$
 (32)

(52)

- les paramètres technologiques, soit :

$$P_{00} = 11.5 \ bar, \quad V_{00} = 75 \ cm^3,$$

$$P_{01} = 10.5 \ bar, \quad V_{01} = 400 \ cm^3,$$

$$d_{R1} = 5 \ mm, \qquad l_{R1} = 23.45 \ mm.$$
(53)

Les figures 11 à 13 présentent les réponses fréquentielles obtenues avec la suspension traditionnelle et la suspension CRONE pour les deux valeurs extrêmes de la masse suspendue M (en bleu M = 75 kg, en vert M = 150 kg).

L'observation des diagrammes de Bode (Figure 11) des transferts $D_1(s)$ et $D_5(s)$ met en évidence l'influence d'une augmentation de la masse M sur chacun des ces transferts. En effet, dans les deux cas, le gain statique D_0 augmente et les fréquences transitionnelles translatent vers les hautes fréquences sans que le maximum d'avance de phase ne soit modifié. Ainsi, la

longueur du gabarit fréquentiel qui caractérise la commande CRONE de deuxième génération [Ous 95] est dimensionnée pour que la fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u appartienne à ce comportement asymptotique d'ordre non entier quelles que soient les valeurs de la masse *M* comprises entre 75 et 150 kg. Ce résultat est illustré par les diagrammes de Bode (Figure 12) et les lieux de Black-Nichols (Figure 13) de la boucle ouverte dans le cas de la suspension CRONE.

De plus, au voisinage de ω_u (diagrammes de gain Figure 12) pour les deux valeurs extrêmes de M, on observe que les variations de gain du régulateur (la suspension) sont compensées par les variations de gain du procédé, d'où une fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u insensible aux variations de M.

Ainsi, l'insensibilité de ω_u assure la robustesse de la rapidité (propriété intrinsèque à la technologie hydropneumatique) et la constance de la marge de phase M_{ϕ} assure la robustesse du degré de stabilité (propriété intrinsèque à l'approche CRONE) vis-à-vis des variations de la masse M. Ces propriétés sont illustrées figure 14 où sont représentées les réponses temporelles obtenues avec la suspension traditionnelle (a) et la suspension CRONE (b) pour les deux valeurs extrêmes de la masse suspendue M (en bleu M = 75 kg, en vert M= 150 kg).



Figure 11 – Diagrammes de Bode de $D_1(j\omega)$ (a) et $D_5(j\omega)$ (b) pour M = 75 kg (en bleu) et M = 150 kg (en vert)



Figure 12 – Diagrammes de Bode de $\beta(j\omega)$ avec $D_1(j\omega)$ (a) et $D_5(j\omega)$ (b) pour M = 75 kg (en bleu) et M = 150 kg (en vert)



Figure 13 – Lieux de Nichols de $\beta(j\omega)$ avec $D_1(j\omega)$ (a) et $D_5(j\omega)$ (b) pour M = 75 kg (en bleu) et M = 150 kg (en vert)



Figure 14 – Réponses temporelles obtenues avec les suspensions traditionnelle (a) et CRONE (b) pour M = 75 kg (en bleu) et M = 150 kg (en vert)

3 - La suspension de véhicule automobile : élément de confort et de tenue de route

3.1 - Origines de l'inconfort

Le confort de l'occupant d'un véhicule résulte de la combinaison de plusieurs facteurs caractérisant l'environnement physique dans l'habitacle (bruit, dimensions, température, vibrations, etc) [Ver 88]. L'effet de ces facteurs sur chaque individu dépend des caractéristiques propres de ce dernier tant au plan physique (anthropométrie, capacités sensorielles et fonctionnelles) que socioculturel (tolérance, motivation).

Cependant, si l'inconfort a des origines diverses et complexes, l'étude du comportement dynamique du corps humain permet de définir les performances que doit présenter une suspension en matière de confort. En effet, le corps humain est constitué d'un certain nombre de masses, réunies par des tissus élastiques et amortissants, qui peuvent être sollicités par les vibrations du véhicule [Mit 88] et entrer en résonance [Bon 88]. Le transfert entre le thorax et le bassin présente une première résonance dans la bande de 3 à 5 Hz et une deuxième, moins prononcée, vers 8-10 Hz. La tête possède aussi deux modes de vibration privilégiés dont le plus important se situe dans la zone de 4 à 6 Hz et l'autre vers 20 à 30 Hz. Les fréquences de résonance des masses corporelles internes, les reins, les viscères etc, se situent également dans la bande de fréquences de 4 à 8 Hz. C'est la raison pour laquelle un sujet assis sur un siège présente un maximum de sensibilité entre 4 et 8

Hz selon la direction verticale. A cette bande de fréquences de grande sensibilité du corps humain s'ajoute un intervalle de 0 à 0.8 Hz où un sujet assis sur un siège excité par la base peut être sujet à la cinétose appelée plus familièrement mal de mer.

Il existe toutefois une dispersion entre les comportements dynamiques des individus [Don 88]. Cette dispersion est non seulement due aux différences de morphologies mais aussi aux attitudes plus ou moins détendues et des postures qu'ils adoptent sur le siège. La posture du sujet joue un rôle particulièrement important quant à la réponse dynamique du corps humain.

3.2 - La tenue de route

La tenue de route peut être définie comme l'aptitude que possède un véhicule à suivre plus ou moins facilement la trajectoire imposée par son conducteur. Elle dépend essentiellement :

- de la position du centre de gravité du véhicule ;

- de la position du centre de poussée ;

- de la direction et de la géométrie des trains avant et arrière ;

- des suspensions ;

- de l'adhérence des pneumatiques en fonction de l'état de la route [Dah 79], [Dod 73].

Le pneumatique représente le seul et unique lien du véhicule avec le sol. Il doit supporter la charge du véhicule, transmettre les forces motrices, maintenir la stabilité de la trajectoire, assurer le freinage en adhérant à la route et être un élément de suspension. Des travaux ont montré qu'en première approche l'adhérence est proportionnelle à la force de contact du pneumatique sur le sol [Mic 89]. Cette force de contact varie autour d'une valeur moyenne qui correspond à la répartition statique de la masse du véhicule. Un bilan des forces agissant sur l'axe de la roue montre l'influence, non seulement du pneumatique, mais aussi de la suspension sur la variation de la force de contact [Hro 88].

3.3 - Fonction d'une suspension de véhicule

La conception d'une suspension de véhicule nécessite donc la prise en compte de deux phénomènes :

- le confort, lié à la physiologie du corps humain ;

- la tenue de route, caractérisée par l'aptitude que possède le véhicule à suivre une trajectoire imposée par son conducteur.

La fonction de la suspension est alors d'assurer une bonne isolation vibratoire de l'habitacle vis-à-vis des sollicitations de la route, une bonne tenue de caisse face aux sollicitations du conducteur (en virage, au freinage et à l'accélération) et de maintenir un niveau d'adhérence au sol suffisamment important pour garder le contrôle du véhicule en toute sécurité [Aut 95].

L'analyse du comportement dynamique du véhicule conduit à définir trois domaines de fréquences [Elo 88] : - les basses fréquences où se situent les fréquences propres des mouvements de la caisse (pompage, tangage et roulis). Elles sont comprises généralement entre 0.8 et 1.6 Hz. Pour des valeurs plus faibles, la suspension est dite moelleuse et les passagers risquent d'être sujet au mal de mer, pour des valeurs plus élevées, la suspension est dite sèche ; - les moyennes fréquences de 2 à 10 Hz qui concernent tous les mouvements du passager sur le siège ;

- enfin, les hautes fréquences de 10 à 50 Hz où se situent le battement de roue et le "hachis" moteur (10 à 20 Hz) [Mit 88], ainsi que les modes longitudinaux des trains de suspension (20 à 50 Hz). Ce domaine constitue une zone limitrophe des fréquences acoustiques.

4 – La suspension CRONE de véhicule automobile

4.1 - Architecture

La figure 15.a présente l'architecture de la suspension CRONE de véhicule automobile. Cette architecture se décompose en deux grandes parties.

La première, appelée *Suspension CRONE Hydractive (SCH)*, est un réseau hydraulique constitué de cellules RC et de valves Tout Ou Rien (TOR) permettant d'isoler certaines parties du réseau. Cette suspension hydractive possède trois modes de fonctionnement [Alt 03] :

- un mode confort caractérisé par un comportement CRONE où tout le réseau hydraulique intervient. Ce mode est sélectionné par le superviseur lorsqu'il n'y a pas de sollicitations conducteur (ligne droite à vitesse constante), favorisant ainsi l'isolation vibratoire face aux sollicitations de la route;
- un mode intermédiaire où une partie du réseau est isolé ;
- un mode ferme où une seule cellule RC est conservée (la plus dissipative) pour favoriser la tenue de route et la sécurité.

La seconde partie, *appelée Suspension CRONE Active Basse Fréquence (SCABF)*, est composée d'un générateur de débit qui associé au réseau hydraulique permet de générer des efforts de manière active pour :

- réguler la hauteur du véhicule autour d'une position de référence (feedback) ;
- tenir la caisse sous sollicitations conducteur par anticipation (feedforward). Pour cette situation, il est à noter que la suspension CRONE hydractive commute sur le mode intermédiaire ou le mode ferme.

4.2 – Stratégie de commande

La figure 15.b présente le schéma de commande de la suspension CRONE. On y retrouve la boucle interne avec la suspension CRONE hydractive (SCH) dont le mode est sélectionné en fonction des sollicitations du conducteur. Ces dernières sont détectées à partir de mesures au niveau du volant (position et vitesse volant) et au niveau des pédales (enfoncement pédale frein et accélérateur). En mode confort CRONE la bande passante de cette boucle est de l'ordre de 1 Hz. Quant à la boucle externe, le signal de commande de la servovalve du générateur de débit (dont la bande passante est d'environ de 10 Hz) est la superposition du signal $u_{FB}(t)$ issu du régulateur CRONE de hauteur et du signal $u_{FF}(t)$ issu du feedforward élaboré à partir des mesures volant et pédales. La bande passante de cette boucle est de l'ordre de 0.1 Hz.



Figure 15 – Architecture de la suspension CRONE (a) et schéma de commande (b)

A l'échelle du véhicule, il y a quatre moyens d'action (les quatre vérins de suspension) pour seulement trois degrés de liberté pour la caisse (Pompage, Tangage et Roulis : PTR) ; le système est donc sur-actionné. C'est la raison pour laquelle une quatrième condition est introduite en ce qui concerne le tau de Répartition Anti-Dévers (RAD). Ce dernier est défini par le rapport du couple anti-roulis développé par l'essieu avant au couple anti-roulis total (somme de la contribution de l'essieu avant et de l'essieu arrière). La valeur de la RAD est caractéristique du comportement survireur (0 < RAD < 0.5) ou sous-vireur (0.5 < RAD < 1) du véhicule, ce dernier étant considéré comme neutre pour une valeur de 0.5.

La stratégie de Contrôle Global de Suspension (CGS) consiste donc à maintenir le pompage, le tangage et le roulis au voisinage de zéro (PTR = 0: objectif de confort) et à contrôler la RAD (objectif de tenue de route et de sécurité).

Cette stratégie de CGS s'inscrit dans un cadre plus général de Contrôle Global du Châssis (CGC) où l'objectif est de coordonner les actions des organes des différentes fonctions du châssis (direction, freinage et suspension) afin d'augmenter la sécurité active du véhicule.

4 – Conclusion

Les performances du banc d'essais présenté dans ce document permettent de mettre en évidence l'intérêt de la dérivation non entière en isolation vibratoire. Les performances obtenues sont remarquables, notamment lorsque le dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence qui caractérise la suspension CRONE, est réalisé en technologie hydropneumatique à partir d'une méthode de synthèse fondée sur la récursivité fréquentielle. En effet, l'association de l'approche CRONE pour la méthode de synthèse et de la technologie hydropneumatique pour la réalisation permet d'obtenir, non seulement la robustesse du degré de stabilité, mais aussi la robustesse de la rapidité vis-àvis des variations de la masse du dispositif à isoler.

Le principal domaine d'application est celui des suspensions automobiles. Ainsi, la *suspension CRONE passive multisphère* qui a obtenu en 1995 le Trophée AFCET récompensant une collaboration Université-

Industrie exemplaire, et la *suspension CRONE Hydractive* [Alt 03], en cours de développement, sont issues de ce concept développé dans le cadre d'une collaboration contractuelle avec la DRIA de PSA Peugeot Citroën. Il est à noter que la suspension CRONE Hydractive qui présente trois modes de fonctionnement est à l'origine de la définition d'une nouvelle classe de systèmes, à savoir les Systèmes Dynamiques Hybrides Non Entiers (SDHNE).

Références bibliographiques

- [Alt 03] O. Altet, C. Nouillant, X. Moreau and A. Oustaloup : « Hydractive CRONE suspension as hybrid system », International Journal of Hybrid System, Vol. 3, n°2 and 3, pp. 165-188, 2003.
- [Aut 95] F. Autran, F. Bessière, J. Lévine et P. Rouchon : « La fonction suspension, du passif à l'actif : l'approche Valéo » ; Proc. EEA-CNRS workshop « Automatique et Automobile », Bordeaux, Juin 1995.
- [Bon 88] G. Bonnardel : "Confort vibratoire du siège du conducteur" ; Journal de l'Ingénieur de l'Automobile, SIA 88075, pp. 54-58, octobre 1988.
- [Dah 79] T. Dahlberg : "Optimization Criteria for Vehicles Travelling on a Randomly Profiled Road : a Survey"; Vehicle System Dynamics, Vol. 8, pp. 239-252, 1979.
- [Dod 73] C.J. Dodds and J.D.Robson : "The Description of Road Surface Roughness" ; Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, n°2, pp. 175-183, 1973.
- [Don 88] P. Donati et P. Boulanger : "Propositions pour l'établissement d'un code d'essai en vibration des sièges suspendus destinés aux tracteurs routiers" ; Journal de l'Ingénieur de l'Automobile, SIA 88090, pp. 137-139, octobre 1988.
- [Dug 94] S. Dugowson « Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation » Doctorat de l'Université Paris Nord, 16 décembre 1994.
- [Elo 88] X. Eloy: "Caractérisation du confort sur siège dans un véhicule roulant"; Journal de l'Ingénieur de l'Automobile, SIA 88089, pp. 129-135, octobre 1988.
- [Hro 88] D. Hrovat : "Influence of Unsprung Weight Vehicle Ride Quality"; Journal of Sound and Vibration, Vol.124, n°3, pp.497-516, 1988.
- [Mic 89] Rapport interne Michelin : "Caractéristiques des pneumatiques et mesures d'adhérence" ; 1989.
- [Mit 88] M. Mitchke : "Les vibrations du moteur et son influence sur la voiture particulière" ; Journal de la Société des Ingénieurs de l'Automobile, n° 88086, pp. 109-118, octobre 1988.
- [Ous 95] A. Oustaloup : « La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications » ; Edition Hermès, Paris, 1995.
- [Ram 01] C. Ramus-Serment : « Synthèse d'un isolateur vibratoire d'ordre non entier fondée sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques », Thèse de Doctorat soutenue le 10 Juillet 2001 à l'Université Bordeaux 1.
- [Ser 04] P. Serrier : « Synthèse fondée sur la récursivité fréquentielle d'un dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé en technologie hydropneumatique – Application à la suspension CRONE Hydractive », Mémoire de stage MASTER EEA Recherche, Ecole Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur de l'Université Bordeaux 1, 2004.
- [Ver 88] J.P. Verriest : "Le confort postural du conducteur : étude expérimentale et modélisation" ; Journal de l'Ingénieur de l'Automobile, SIA 88088, pp. 122-128, octobre 1988.